

N° d'Ordre : 4 (1972)

Référence C.N.R.S. : A.O. 6874

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Bernard CHENEVEAUX

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'OPTIMALISATION HIERARCHISEE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Soutenue le 18 avril 1972 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. POINTEAU

M. FOULARD

M. BERNARD

M. de LARMINAT

} Examinateurs

N° d'Ordre : 4 (1972)

Référence C.N.R.S. : A.O. 6874

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

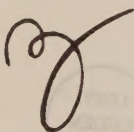
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Bernard CHENEVEAUX

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'OPTIMALISATION HIERARCHISEE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Soutenue le 18 avril 1972 devant la Commission d'Examen

M. DERRAUX

M. GARRIGUES

M. LE DOUARRE

M. LE DUAUIN

M. SELLIER

M. CAVET

M. BRARD (ENSM)

M. ABKOWITZ (ENSM)

M. MEZENCEV Président

M. POINTEAU

M. FOULARD

M. BERNARD

M. de LARMINAT

} Examinateurs

THÈSE

UNIVERSITÉ D'AMSTERDAM

PAR M. BERNARD

DOCTEUR-INGÉNIEUR

1881

Bernard CHENEVEAUX

ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE BRUXELLES



CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MÉCANISMES DES SYSTÈMES D'ÉNERGIE

Présentée à la Commission d'Examen

M. CHENEVEAUX

M. FOUCAULT

M. FOUCAULT

M. FOUCAULT

M. FOUCAULT

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. PAUC

"

M. PETRESCO

"

M. RAFFIN

"

M. VIVIER (ENSM)

"

M. TARDY (ENSM)

Mécanique

M. RAVILLY (ENSM)

"

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLLOUD

"

M. COLLET

"

M. MINN

"

M. MEZENCEV (ENSM)

"

M. MOUTON

"

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

"

M. MARTIN

"

M. PIERI

"

M. QUINIOU

"

M. ROUXEL

"

M. WOJTKOWIAK

"

Mlle DEBRAUX

Biologie

M. GARRIGUES

"

Mme LE DOUARIN

"

M. LE DOUARIN

"

M. SELLIER

"

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs associés

M. BRARD (ENSM)

Mécanique

M. ABKOWITZ (ENSM)

Mécanique

Professeurs sans chaire	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	Melle OFFRET (EN SM)	"
	M. GOBIN (EN SM)	Chimie
	M. TOURNOUX	"
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. BETTEN	Mathématiques
	M. FOUQUES	"
	M. GATESOUBE	"
	M. GAPAILLARD (Chargé d'enseignement)	"
	M. IBISCH	"
	M. LAMEAU (EN SM)	"
	M. LEBORGNE	"
	M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)	"
	M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement EN SM)	Mécanique
	M. GUEVEL (EN SM)	"
	M. SULMONT (EN SM)	"
	M. VILAINE (EN SM)	"
	M. CAILLER (I U T)	Physique
	M. LE BIHAN	"
	M. LE CORRE (I U T)	"
	M. LE MAITRE	"
	M. LONCKE	"
	M. ROSIER	"
	M. THOMAS (Chargé d'Enseignement I U T)	"
	M. BOUCHY (I U T)	Chimie
	M. CHABANEL	"
	M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement I U T)	"
	Mme MARTIN	"
	M. POINTEAU (EN SM)	"
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
Maitres de Conférences	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. NICOLAS	

Je pense aussi à l'avenir de l'école et de la classe de 1880-81, de la vie scolaire et de la vie intellectuelle de nos élèves, de la vie intellectuelle de nos professeurs et de la vie intellectuelle de nos parents. Je pense à tout cela et je me dis que c'est là que se trouve le véritable intérêt de l'école.

Je pense à tout cela et je me dis que c'est là que se trouve le véritable intérêt de l'école.

Je pense à tout cela et je me dis que c'est là que se trouve le véritable intérêt de l'école.

C'est aussi un devoir pour moi d'exprimer mes sentiments à mes élèves, à mes professeurs et à mes parents. Je pense à tout cela et je me dis que c'est là que se trouve le véritable intérêt de l'école.

Je pense à tout cela et je me dis que c'est là que se trouve le véritable intérêt de l'école.

A ma femme,

et à mes fils

AVANT-PROPOS

Le présent travail, entrepris au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M., doit son existence à la bienveillance de Monsieur le Professeur MEZENECV et à l'attention constante qu'il prodigue à chacun de ses chercheurs. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier également Monsieur THOMAS et Monsieur DE LARMINAT qui ont tant contribué à l'animation de ce Laboratoire dès ses débuts.

Que Monsieur FOULARD, dont les activités à l'Institut Polytechnique de Grenoble sont très proches des nôtres, soit assuré de ma reconnaissance pour avoir bien voulu participer à mon Jury.

C'est aussi un honneur pour moi d'avoir pu intéresser à mon travail Monsieur BERNARD de l'Ecole des Mines et Monsieur POINTEAU qui dirige l'équipe de Chimie Physique de l'E.N.S.M. dans laquelle j'ai le plaisir de collaborer avec Messieurs LAURGEAU et TRIKI. Pour avoir bien voulu juger cette thèse, qu'ils soient sincèrement remerciés.

Et je ne saurais oublier dans ces remerciements tous mes collègues chercheurs et enseignants, le personnel technique et Mademoiselle REUMONT qui a bien voulu dactylographier ce fascicule.

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION -	1
Chapitre 1 - INTRODUCTION AUX METHODES HIERARCHIQUES -	7
1 - TERMINOLOGIE - NOTION DE HIERARCHIE	7
2 - POSITION DU PROBLEME D'OPTIMALISATION - DECOMPOSITION, INTERACTION	9
2,1 - Notations	9
2,2 - Décomposition	10
2,3 - Exemples statiques	12
3 - METHODES DE COORDINATION	13
3,1 - Méthode par "INTERVENTION sur le MODELE"	13
3,11 - Interaction de modèle	13
3,12 - Interaction de critère	15
3,2 - Méthode par "INTERVENTION sur le CRITERE"	16
Chapitre 2 - UN PROGRAMME DE CALCUL HIERARCHISE DE COMMANDE OPTIMALE EN PRESENCE DE CONTRAINTES DE TYPE BORNE SUR LA COMMANDE ET SUR L'ETAT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE DISCRET -	21
1 - POSITION DU PROBLEME	21
2 - DECOMPOSITION	22
3 - PROBLEMES DU PREMIER NIVEAU	23
4 - PROBLEME DE COORDINATION AU DEUXIEME NIVEAU	24
4,1 - Formulation du problème d'optimalisation à l'aide de la fonction duale	24
4,2 - Application au problème donné	25
5 - EXEMPLE	26
Annexe - RAPPEL DES RESULTATS DE L'OPTIMALISATION STATIQUE (PROGRAMMATION MATHEMATIQUE) -	31

Chapitre 3 - COMMANDE HIERARCHISEE QUADRATIQUE -	41
Introduction	41
1 - POSITION DU PROBLEME GLOBAL	42
2 - SOLUTION GLOBALE	43
3 - DECOMPOSITION EN SOUS-SYSTEMES	45
3,1 - Interactions des sous-systèmes	47
3,2 - Interactions des commandes optimales	47
4 - PROBLEME DU PREMIER NIVEAU - OPTIMALISATION LOCALE	48
5 - PROBLEME DU SECOND NIVEAU	50
6 - COORDINATION EN LIGNE DANS LE CAS DES CRITERES A HORIZON TRES GRAND OU A HORIZON FUYANT	52
6,1 - Position du problème global	52
6,2 - Optimatisation des sous-systèmes	53
6,3 - Commande de coordination	54
6,4 - Avantages de la méthode	57
Chapitre 4 - APPLICATION A LA COMMANDE EN TEMPERATURE ET EN PRESSION D'UN GENERATEUR DE VAPEUR -	59
Introduction	59
1 - MODELE ET CRITERE	60
2 - SOLUTION OPTIMALE GLOBALE	61
3 - DECOMPOSITION ET INTERACTIONS	64
4 - REGULATIONS LOCALES	65
4,1 - Régulation de pression	65
4,2 - Régulation de température	66
4,3 - Performances des régulations locales	67
5 - COORDINATION	69
CONCLUSION -	75

INTRODUCTION

Le terme "commande hiérarchisée" montre bien ce que doit ce nouveau domaine de l'Automatique au parallèle que l'on fait très souvent entre l'organisation des systèmes de commande de processus physiques et l'organisation de toute tâche collective humaine. Nous assistons au développement permanent de l'Automatique et celle-ci est appelée à s'intéresser à des problèmes de plus en plus vastes et à des processus de plus en plus complexes. De même que la structure artisanale, caractérisée par la responsabilité totale d'un seul homme sur son travail, est devenue insuffisante quand ce travail a du s'intégrer dans une société industrielle, de même le point de vue classique de la commande de processus ne suffit plus quand on doit commander des systèmes vastes et complexes.

Cependant, pour ces systèmes, une théorie très puissante existe : celle de l'optimisation fonctionnelle. Elle fut créée pratiquement dans un seul but : la commande des engins spatiaux et le succès de cette application a invité tous ceux qui s'intéressaient à la commande d'autres processus plus courants à s'intéresser à cette théorie et à tenter de l'appliquer à leurs problèmes. Elle est, en effet, très séduisante : connaissant un modèle mathématique du processus et choisissant un certain critère de fonctionnement, il est possible, sans faire aucune hypothèse sur la structure du système de commande, de synthétiser directement celui-ci. A priori, on peut mettre dans ce critère de fonctionnement toutes les volontés de l'utilisateur : minimalisation du coût d'exploitation, de l'usure technologique, du temps de réponse du système ou maximalisation du rendement, du profit, et ceci en présence de contraintes sur les commandes du processus ou sur ses états. Nous échappons ainsi à la vieille servitude de la théorie classique de l'Automatique qui consiste à analyser une structure imposée a priori et à la modifier par essais successifs jusqu'à ce qu'elle présente des performances satisfaisantes.

Malheureusement, mis sous cette forme, le problème le plus réduit présente des difficultés considérables de résolution pratique. Et dès que la taille du problème augmente, il faut des moyens de calculs qui ne sont pas à la portée de l'utilisateur. Pour s'en convaincre, il suffit de penser justement aux moyens de commande des véhicules spatiaux.

La première difficulté vient du fait que la théorie de l'optimisation répond au problème posé par des conditions nécessaires et non par des solutions explicites. Prenons l'exemple d'un système décrit par une équation d'état :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

$\underline{x}$ étant l'état et $\underline{u}$ la commande

dont nous voulons minimaliser le critère J défini par :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad t_1 \text{ étant fixé}$$

en agissant sur $\underline{u}$, $\underline{x}(t_0)$ étant donné.

La commande optimale $\underline{u}$ est alors celle qui vérifie les conditions suivantes :

$$\text{soit } H = g(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\psi}^T \cdot \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$$

$$\dot{\underline{\psi}} = - \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \quad \text{avec} \quad \underline{\psi}(t_1) = \underline{0}$$

Le problème est donc un problème à valeurs limites en deux points : condition initiale et condition finale.

Si, de plus, $\underline{u}$ et $\underline{x}$ sont soumis à certaines contraintes, il apparaît des conditions supplémentaires en chaque point où ces grandeurs atteignent les limites permises par les équations inégalités de contrainte. Nous avons donc alors un problème à valeurs limites en plusieurs points.

Si le problème est posé de cette façon, il n'est guère qu'un moyen de le résoudre : choisir une trajectoire qui a des chances de respecter les conditions aux limites et agir sur ses paramètres pour vérifier ces conditions. Chaque problème est donc particulier : le changement de conditions initiales, de paramètres ou de dimension, détruit la méthode de calcul.

S'il est concevable de mettre au point une méthode très particulière quand le problème en vaut la peine (changement d'orbite de satellite par exemple), il est apparu nécessaire de développer une méthode plus générale et moins compliquée pour les processus plus ordinaires qui ont déjà vécu des années avec des régulations classiques. C'est l'objet de l'optimisation quadratique appliquée aux systèmes linéaires.

Si l'équation d'état est linéaire en tous ses termes et stationnaire : $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$, si le critère est une forme quadratique, si ses bornes d'intégration sont t_0 , $+\infty$ ou t , $t+T$ (horizon fuyant), et s'il n'existe aucune contrainte, alors les conditions d'optimalité conduisent vers une solution explicite qui permet

d'exprimer $\underline{u}$ par une équation de bouclage $\underline{u} = K \underline{x}$, K étant une matrice à coefficients constants. On se rapproche ainsi des régulations classiques tout en gardant l'aspect "synthèse" de la commande optimale. Quand la matrice K est calculée, il est alors possible de mettre en place une "régulation multivariable" qui ne nécessite aucun calcul complexe et donc n'oblige pas à utiliser un calculateur en ligne.

Mais, ici encore, dès que la dimension du système augmente, se posent des problèmes pratiques assez graves. En effet, l'équation de bouclage $\underline{u} = K \underline{x}$ implique que toutes les commandes sont fonctions de tous les états. Par conséquent, dès qu'une commande doit être manipulée extérieurement (commande manuelle, séquence de démarrage, déclenchement d'une sécurité), tout le système de commande optimale est compromis. Il en est de même dès qu'une mesure vient à manquer pour un réglage ou un changement de capteur par exemple. C'est pourquoi les systèmes de commandes globaux sont actuellement toujours doublés de régulations classiques. Cet état des choses engendre un coût d'installation supplémentaire très important et une certaine méfiance vis-à-vis des systèmes modernes accusés de complexité et de délicatesse.

Ceci montre assez bien les difficultés nées de la taille du problème de commande, que ce soit dans le domaine du calcul de solutions optimales complexes ou le domaine de l'application industrielle de théories plus simples.

Revenons à notre comparaison avec le travail humain. Quand la taille des travaux à réaliser a dépassé ses possibilités individuelles, l'artisan a dû disparaître ou s'intégrer dans une structure hiérarchisée qui a su organiser d'une part la séparation du travail et, d'autre part, la coordination de chaque tâche individuelle par un supérieur exerçant une autorité et vérifiant le travail de chacun. La complexité de la tâche s'accroissant, le découpage s'est multiplié avec le nombre des niveaux de décision.

De la même façon est née l'idée d'une commande automatique hiérarchisée des processus et la structure de cette commande suit de très près la structure hiérarchique humaine.

Le problème fondamental est celui du rapport hiérarchique entre deux niveaux de responsabilité, et on verra comment il est possible d'étendre les notions développées à plusieurs niveaux.

Le premier problème qui se pose est celui de la "partition" du travail au niveau le plus bas. Cette partition entraîne une "interaction" entre chacune des parties. Il faut alors trouver le moyen d'exercer une "intervention" sur chaque opérateur de façon à ce qu'il tienne compte de ces interactions. Le problème du premier niveau est donc un problème de décision en présence d'interven-

tion (travail local).

Le problème du second niveau sera de choisir cette intervention en fonction du travail de chacun de ses subordonnés, de façon à ce que globalement, malgré les interactions, le travail de l'ensemble soit satisfaisant : c'est un travail de "coordination".

La structure hiérarchique est alors justifiée par le fait que chaque tâche locale est simple et que le travail du coordinateur est lui aussi plus simple que le traitement du problème global.

Pour le premier niveau, il ne sera pas nécessaire de développer une théorie nouvelle. Mais le problème de la coordination nous amènera à énoncer des principes spécifiques qui permettront de mettre en place ce coordinateur. Les deux principes fondamentaux élaborés au CASE System Research Center de Cleveland portent les noms de "principe de prédiction de l'interaction" et de "principe d'équilibrage de l'interaction".

Pour illustrer cette théorie nouvelle, nous présenterons deux applications très différentes mais appartenant toutes les deux au domaine de l'optimisation dynamique.

La première application consistera à calculer hors ligne la commande et les trajectoires optimales d'un système linéaire avec un critère quadratique à temps fixé et fini en présence de contraintes de type borne sur la commande et les états, sans limiter la dimension du problème, ni faire aucune hypothèse sur la forme des trajectoires. Nous utiliserons pour cela des algorithmes très simples de programmation non linéaire et nous n'aurons aucun besoin des conditions d'optimalité particulières aux problèmes avec contraintes.

La seconde application intéresse le domaine de la commande en ligne de processus industriels à l'aide de l'optimisation de critères quadratiques. Nous montrerons comment on peut obtenir un comportement optimal grâce à une structure hiérarchique comprenant deux niveaux :

- au premier niveau, des régulations locales analogues aux régulations monovariabiles classiques, mais établies à l'aide de sous-critères quadratiques.

- au second niveau, un coordinateur qui tiendra compte de tout le système pour venir modifier de façon dynamique les entrées des chaînes bouclées locales ; ce qui revient à modifier la consigne de chaque régulation en fonction de l'évolution des autres parties du processus non concernées par cette régulation.

Cette méthode est appliquée à un système représenté par un vecteur d'état à cinq composantes, une commande et une sortie à deux composantes : température et pression d'une chaudière à circulation naturelle commandée par le débit de combustible et le débit d'eau de désurchauffe.

Cet exemple nous permettra de distinguer les avantages pratiques de cette structure de commande, en particulier, dans le domaine de la fiabilité et de la souplesse d'emploi.

La conclusion de ce travail mettra l'accent sur l'intérêt pratique de ces nouvelles méthodes :

- intérêt pour le calcul hors ligne : les algorithmes déjà éprouvés peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes complexes et nouveaux, sans qu'il soit toujours nécessaire de développer des méthodes spécialisées.

- intérêt pour la commande en ligne : l'adoption de cette structure hiérarchique permet de concilier la haute valeur théorique de la commande optimale avec les qualités largement reconnues de la régulation classique monovariable, à savoir la souplesse d'emploi et la fiabilité due à cette tendance naturelle des systèmes bouclés simples : sans grands calculs théoriques, ils arrivent à faire face à toutes les situations.

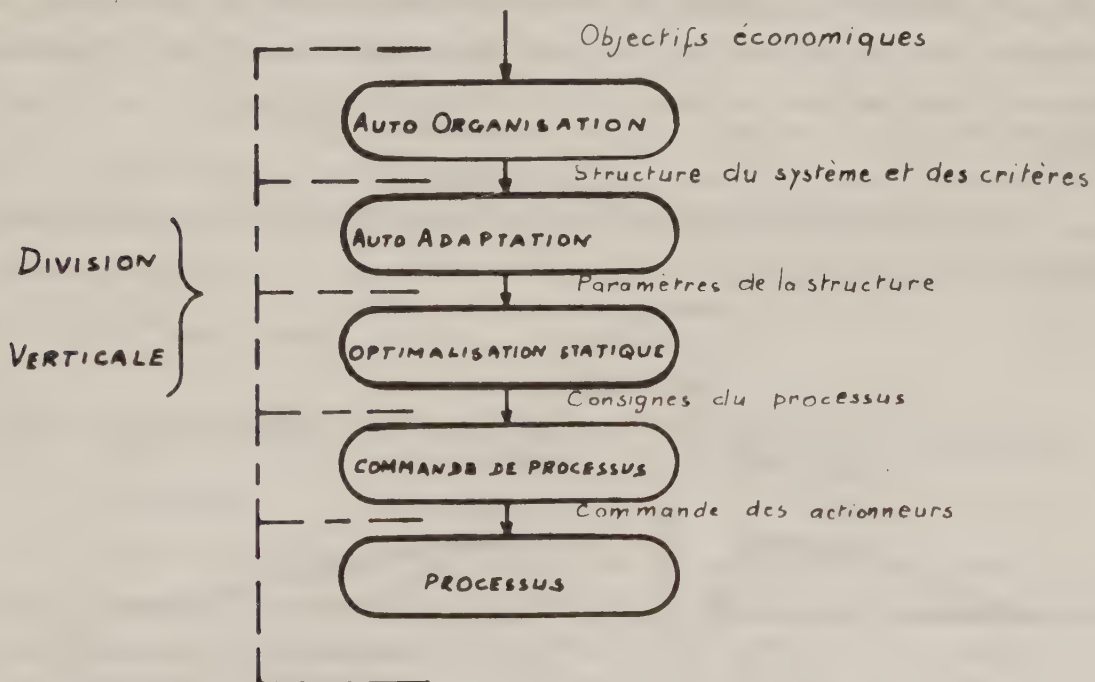
Chapitre 1

INTRODUCTION AUX METHODES HIERARCHIQUES

1 - TERMINOLOGIE - NOTION DE HIERARCHIE -

Nous serons amenés à introduire des termes nouveaux dont il est nécessaire de préciser la signification avant même de poser le problème de l'optimisation hiérarchisée. Et, tout d'abord, il convient de distinguer, dans le partage des tâches, le partage d'après la nature des travaux, et le partage d'un même travail très étendu ; ce qui correspond dans le premier cas à une division verticale et, dans le deuxième cas, à une division horizontale.

La division verticale de la commande des processus aboutit à une structure à plusieurs couches, schématisée par la figure ci-dessous.



1ère couche : Auto-organisation : on commence par choisir les grandeurs qui sont intéressantes et par déterminer la nature du système et la nature du critère, propres à satisfaire les objectifs économiques.

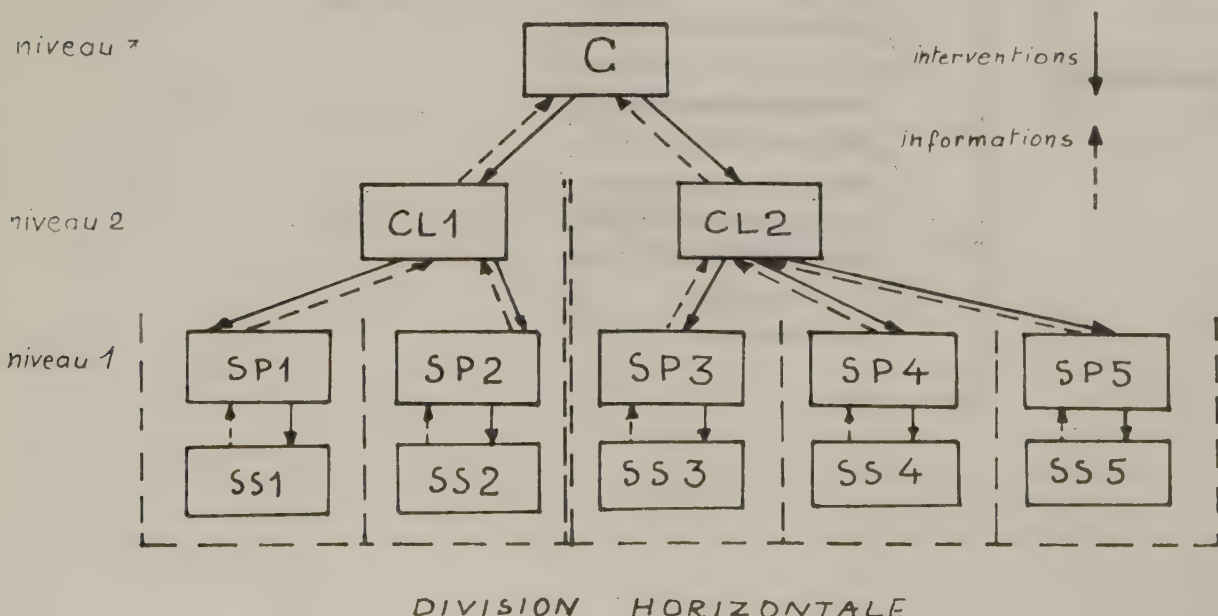
2ème couche : Auto-adaptation : c'est-à-dire identification des paramètres du modèle et du critère.

3ème couche : Optimisation statique : le processus et le critère économique étant définis, choisissons la valeur de consigne de chaque grandeur de façon à optimiser ce critère.

4ème couche : Les consignes étant fixées, le modèle du processus étant connu, choisissons un critère dynamique dont l'optimisation conduira à déterminer la commande de chaque actionneur du processus.

Cette organisation ne fait pas l'objet de notre étude, mais elle était nécessaire pour spécifier à quelles couches appartient l'optimisation : à la quatrième qui concerne la commande du processus (optimisation dynamique), et à la troisième pour ce qui est de l'optimisation statique. En nous limitant au domaine de l'optimisation, nous allons procéder maintenant à une division horizontale.

La division horizontale conduit à une structure de la forme suivante par exemple.



1er niveau : Le système global est décomposé en "sous-systèmes" appelés SSI, auxquels sont associés des "sous-critères" définissant les "sous-problèmes" SPI qui doivent être résolus conformément à "l'intervention" du supérieur hiérarchique. Chaque partie du premier niveau renvoie alors à ce supérieur une "information" pour lui permettre de juger son travail.

2ème niveau : Ce second niveau est appelé "coordinateur". En fonction des informations fournies par ses subordonnés, il choisit les grandeurs d'intervention de façon à optimiser son propre critère, appelé "critère de coordination". Nous avons représenté ici deux coordinateurs locaux CL1 et CL2.

On peut alors étendre ce fonctionnement jusqu'au coordinateur final C dont le but est bien sûr d'assurer l'optimisation globale, malgré les interactions (ou conflits) qui peuvent exister entre les subordonnés.

Pour que cette structure hiérarchique soit efficace, il faut bien entendu que :

- d'une part, en remontant la pyramide, l'information soit de plus en plus dépouillée et de plus en plus significative,
- d'autre part, en descendant la pyramide, les interventions soient de plus en plus précises mais moins difficiles à élaborer et moins conséquentes.

Le problème de la décomposition, que nous ne traiterons pas explicitement ici, est donc de choisir un partage du travail, propre à obtenir le meilleur fonctionnement de la structure en évitant les niveaux superflus. Nous supposerons que cette décomposition peut être effectuée de façon satisfaisante par une démarche intuitive.

2 - POSITION DU PROBLEME D'OPTIMALISATION - DECOMPOSITION, INTERACTION -

2,1 - Notations

Nous adopterons des notations qui s'appliquent aussi bien à l'optimisation statique (minimalisation de fonctions) qu'à l'optimisation dynamique (minimalisation de fonctionnelles).

- Variables : $\underline{x}$ et $\underline{u}$ vecteurs, fonctions du temps ou non
 - $\underline{x}$ variable non manipulable
 - $\underline{u}$ variable manipulable

- Caractérisation du système S :

$F(\underline{x}, \underline{u}) = 0$ relations de type égalité caractérisant un système algébrique ou différentiel

$R(\underline{x}, \underline{u}) \geq 0$ relations de type inégalité algébriques

- Critère :

$J(\underline{x}, \underline{u})$ fonction ou fonctionnelle

- Problème :

minimaliser par rapport à $\underline{u}$ le critère $J(\underline{x}, \underline{u})$

en respectant $F(\underline{x}, \underline{u}) = 0$ et $R(\underline{x}, \underline{u}) \geq 0$

2,2 - Décomposition

Décomposer le problème d'optimisation consiste à former, à partir du vecteur $\underline{x}$, plusieurs vecteurs de dimension moindre :

$$\underline{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_N \end{vmatrix}$$

avec, par exemple : $\underline{x}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ $\underline{x}_2 = \begin{vmatrix} x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}$ etc... jusqu'à :

$$\underline{x}_N = \begin{vmatrix} x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix}$$

et de même : $\underline{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{vmatrix}$

Si nous associons au vecteur $\underline{x}_1$ le vecteur $\underline{u}_1$
 au vecteur $\underline{x}_2$ le vecteur $\underline{u}_2$
 et ainsi de suite, nous avons formé N sous-systèmes.

La relation d'égalité qui lie $\underline{x}_1$ et $\underline{u}_1$ sera notée $F_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1) = 0$ et nous aurons de même $R_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1) \geq 0$. Si on isole de la même façon la partie de J qui contient uniquement $\underline{x}_1$ et $\underline{u}_1$, nous l'appellerons J_1 .

Pour plus de clarté, nous nous bornerons volontairement au cas où $N = 2$. Mais ce qui va être dit pour deux sous-systèmes est généralisable.

Quand on a ainsi décomposé le système et le critère, on peut formuler deux sous-problèmes :

$$\min_{\underline{u}_1} J_1 \quad \text{en respectant} \quad F_1 \text{ et } R_1$$

$$\min_{\underline{u}_2} J_2 \quad \text{en respectant} \quad F_2 \text{ et } R_2$$

La question se pose alors de savoir si résoudre ces deux sous-problèmes suffit pour résoudre le problème global.

Il faut distinguer plusieurs cas :

1er cas : $J = J_1 + J_2$: les sous-critères sont purement additifs

F est équivalent à $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$

Alors les deux sous-problèmes sont parfaitement disjoints et les résoudre revient à résoudre le problème global : il n'est pas nécessaire de les coordonner.

2ème cas : $J = J_1 + J_2$ (critères additifs),

mais F est équivalent à $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ et $F_{12} = 0$

F_{12} étant un système de contraintes égalité faisant intervenir à la fois des grandeurs appartenant au sous-système S_1 et des grandeurs appartenant au sous-système S_2 .

Si on appelle $\underline{z}_1$ la grandeur de S_1 intervenant sur S_2

et $\underline{z}_2$ la grandeur de S_2 intervenant sur S_1

on obtient la formulation suivante :

$$F_1(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{x}}_1, \underline{z}_1) = 0$$

$$F_2(\underline{\hat{u}}_2, \underline{\hat{x}}_2, \underline{z}_2) = 0$$

$$\text{et } F_{12}(\underline{z}_1, \underline{z}_2) = 0$$

$\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{x}}_1, \underline{\hat{u}}_2, \underline{\hat{x}}_2$ étant les grandeurs de S_1 et de S_2 qui n'interviennent pas dans F_{12} .

On dit alors qu'il y a "INTERACTION de MODELE", les grandeurs d'interaction $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ couplant les deux sous-systèmes par une équation

supplémentaire entre les variables.

3ème cas : $F = 0$ revient bien à assurer $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$
mais le critère n'est plus purement additif :

$$J = J_1 + J_2 + J_{12}$$

avec : $J_1(\underline{\hat{x}}_1, \underline{\hat{u}}_1, \underline{z}_1)$

$$J_2(\underline{\hat{x}}_2, \underline{\hat{u}}_2, \underline{z}_2)$$

et $J_{12}(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$

On parlera alors d'"INTERACTION de CRITERE", puisqu'il existe une partie du critère qui ne peut pas se séparer entre le sous-critère du sous-système S_1 et le sous-critère du sous-système S_2 .

4ème cas : C'est le cas le plus général où les deux hypothèses précédentes sont réalisées :

$$F = 0 \text{ est équivalent à } F_1 = 0, F_2 = 0 \text{ et } F_{12} = 0$$

$$\text{et } J = J_1 + J_2 + J_{12}$$

2,3 - Exemples statiques

1) Soit $J = x^2 + 2x + 16 y^2 + u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w$

$$\text{et } F \begin{cases} x + 2y = 0 \\ u + w = 0 \\ 3x + u = 0 \end{cases} \quad \text{sans contraintes R}$$

Décomposons de la façon suivante :

$$J_1 = x^2 + 2x + 16 y^2 \quad \text{associé à } F_1 = x + 2y = 0$$

$$J_2 = u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w \quad \text{associé à } F_2 = u + w = 0$$

On a ainsi défini deux sous-problèmes à deux dimensions. Mais l'optimisation ainsi formulée ne tient pas compte de $F_{12} = 3x + u = 0$, équation d'interaction de modèle qu'il faudra bien respecter. Ce sera le travail du coordinateur.

2) Soit $J = x^2 + 4x + 4 x u + u^2 + 2u$

sans contraintes F ou R

Posons : $J_1 = x^2 + 4x$

$$J_2 = u^2 + 2u$$

Minimaliser J_1 et J_2 ne revient pas à minimaliser le critère global J en raison du terme $J_{12} = 4 \times u$ qui introduit une interaction de critère. Les sous-problèmes définis par J_1 et J_2 devront donc être ici encore coordonnés de façon à minimaliser effectivement J .

3 - METHODES DE COORDINATION -

De même que l'on a distingué les "interactions de modèle" et les "interactions de critère", les méthodes de coordination seront réparties en deux grandes classes : la coordination par "INTERVENTION sur le MODELE" et la coordination par "INTERVENTION sur le CRITERE". Mais il faut noter tout de suite que chaque méthode peut s'appliquer indifféremment aux deux cas d'interactions.

3,1 - Méthode par "INTERVENTION sur le MODELE"

Encore appelée "méthode naturelle" ("feasible method") ou méthode de "prédiction de l'interaction".

Elle consiste à laisser choisir a priori par le coordinateur les variables d'interaction.

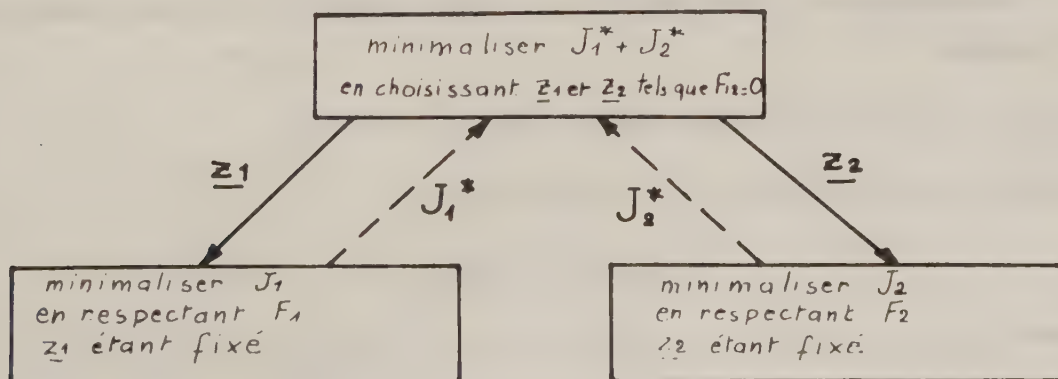
Les sous-problèmes au premier niveau consistent donc à optimiser les sous-critères alors que les grandeurs d'interaction sont fixées.

Le problème du coordinateur est de choisir ces grandeurs de façon à optimiser le critère global.

Cette méthode s'applique différemment suivant le type d'interaction.

3,11 - Interaction de modèle

Le schéma suivant indique comment se répartit le travail entre les deux niveaux :



Le deuxième niveau fixe a priori z_1 et z_2 de façon à respecter l'équation d'interaction :

$$F_{12}(z_1, z_2) = 0$$

Connaissant z_1 , le premier sous-optimaliseur minimise $J_1(x_1, u_1, z_1)$ en respectant $F_1 = 0$ et transmet la valeur trouvée J_1^* au coordinateur.

De même, le second sous-optimaliseur minimise par rapport à u_2 $J_2(x_2, u_2, z_2)$, z_2 étant fixé, en respectant $F_2 = 0$, et transmet le résultat J_2^* .

Le travail du coordinateur est alors de choisir z_1 et z_2 pour que le critère $J^* = J_1^* + J_2^*$ soit minimum.

Exemple :

$$\begin{aligned} J &= x^2 + 2x + 16 y^2 + u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w + t^2 + t + r^2 \\ x + 2y &= 0 \\ F \quad u + w &= 0 \\ 3x + u &= 0 \end{aligned}$$

Décomposons J :

$$\begin{aligned} J_1 &= x^2 + 2x + 16 y^2 + t^2 + t & F_1 &= x + 2y = 0 \\ J_2 &= u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w + r^2 & F_2 &= u + w = 0 \\ J_{12} &= 3x + u = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soient } x \text{ et } u \text{ fixés : } x &= z_1 \\ u &= z_2 \end{aligned}$$

$$\text{et tels que : } F_{12} = 3 z_1 + z_2 = 0$$

alors, si on minimise J_1 par rapport à la seule variable qui reste manipulable t , nous obtenons :

$$J_1^* = z_1^2 + 2 z_1 + 4 z_1^2 - 1/4$$

et, de même, nous minimisons J_2 par rapport à r :

$$J_2^* = 9 z_1^2 - 2 z_1 - 6 z_1^2 + 4 z_1$$

$$\text{en exprimant } z_2 = -3 z_1$$

Le coordinateur devra donc minimiser :

$$\begin{aligned} J^* &= J_1^* + J_2^* \\ &= 8 z_1^2 + 4 z_1 - 1/4 \end{aligned}$$

d'où :

$$z_1 = - 1/4$$
$$z_2 = + 3/4$$

ce qui permet aux optimaliseurs du premier niveau de calculer directement y et w .

Bien sûr, il était ici possible d'obtenir directement les valeurs optimales de x, y, u ($x, y, u, w, \dots$), mais cet exemple très simple nous a permis d'illustrer la méthode.

Il convient ici de faire deux remarques :

Remarque 1 : Dans le cas général, il n'est pas possible de résoudre explicitement le problème. La procédure comporte donc au premier niveau deux optimisations itératives incluses dans une grande boucle permettant de réaliser la coordination.

Remarque 2 : La méthode sera donc nécessairement assez longue. Mais il faut noter que l'on est passé d'une optimisation à 4 dimensions à une succession de recherches à 1 dimension. L'intérêt est évident : on peut utiliser des moyens de calculs plus réduits de façon successive et appliquer des méthodes éprouvées pour un petit nombre de variables, mais qui présentent des difficultés d'utilisation ou de convergence pour un nombre plus élevé. C'est le cas de la majorité des méthodes de programmation non linéaire.

3,12 - Interaction de critère

Dans le cas d'interaction de critère, il est très facile de se ramener au cas précédent par l'introduction d'une pseudo variable intermédiaire :

$$\text{Si } F_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{z}_1) = 0$$
$$F_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{z}_2) = 0$$

et

$$J = J_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{z}_1) + J_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{z}_2) + J_{12}(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$$

Posons :

$$\underline{z}_1 = \underline{s} \quad (\underline{z}_1 \text{ est choisie comme variable de couplage})$$

alors J peut s'écrire :

$$J = J'_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{s}) + J'_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{z}_2, \underline{s})$$

d'où les deux sous-problèmes faciles à formuler quand s est fixé :

$$\min J_1 \text{ en respectant } F_1 \text{ avec } s \text{ fixé}$$

$$\min J_2 \text{ en respectant } F_2 \text{ avec } s \text{ fixé}$$

Le coordinateur aura le même travail que précédemment :

$$\min (J_1^* + J_2^*) \text{ en agissant sur } s$$

Exemple :

$$J = x^2 + 4x + 4xu + u^2 + 2u$$

sans contraintes, c'est-à-dire sans relations F ou R

$$J_1' = x^2 + 4x + 4xs$$

$$J_2' = s^2 + s$$

alors :

$$J_1^* = -4s^2 - 8s - 4$$

$$J_2^* = s^2 + s$$

$$J^* = J_1^* + J_2^* = -3s^2 - 6s - 4$$

dont le minimum est atteint pour $s = -1$.

La procédure est donc tout-à-fait identique à celle du cas précédent et appelle les mêmes remarques.

Pour conclure le paragraphe consacré à cette méthode, il faut noter que, agissant sur les interactions directement, les relations d'interaction peuvent être constamment satisfaites. En particulier, si on arrête la procédure avant convergence totale, c'est le critère global qui sera dégradé, mais le système respectera toujours ses équations de définition.

3,2 - Méthode par "INTERVENTION sur le CRITERE"

Pour l'essentiel, cette méthode consiste à négliger provisoirement la nature interactive du processus et à rajouter au critère un terme qui amènera les solutions locales à respecter les interactions.

C'est ce qui a conduit à utiliser également les termes de "méthode artificielle" ("non feasible method") ou "méthode par équilibrage des interactions".

3,21 - Dans le cas d'interaction de modèle, cette méthode suivra la procédure symbolisée par la figure suivante.

On définit un Lagrangien qui remplace le critère J :

$$L = J + \underline{\lambda}^T F_{12}$$

ce qui permet de découpler le problème dès que le paramètre $\underline{\lambda}$ est fixé :

$$L = L_1 + L_2 = L_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{\lambda}) + L_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{\lambda})$$

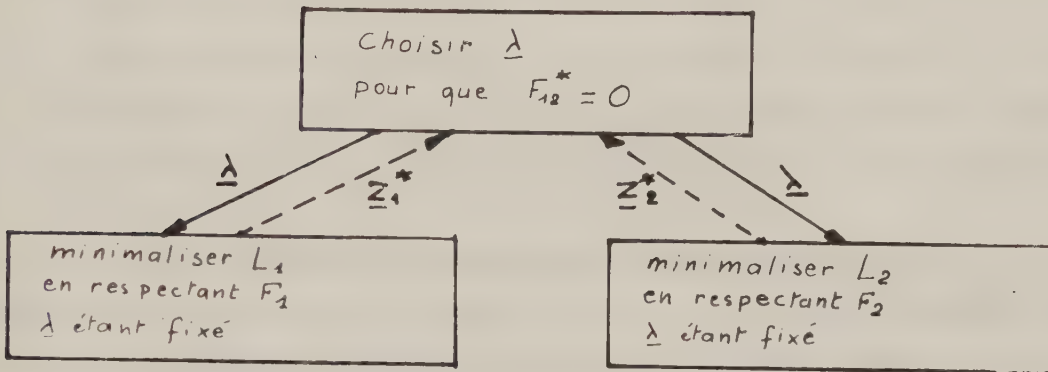
et les sous-problèmes seront définis par :

minimaliser L_1 en respectant F_1 avec $\underline{\lambda}$ fixé

minimaliser L_2 en respectant F_2 avec $\underline{\lambda}$ fixé

Il en résulte une valeur non nulle de $F_{12}^* : F_{12}^*(\underline{\lambda})$

Le coordinateur sera donc chargé de choisir $\underline{\lambda}$ pour que F_{12}^* soit nul :



Exemple :

$$J = x^2 + 2x + 16 y^2 + u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w$$

$$F_1 = x + 2y = 0$$

$$F_2 = u + w = 0$$

$$F_{12} = 3x + u = 0$$

$$J_1 = x^2 + 2x + 16 y^2$$

$$J_2 = u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w$$

$$L = J + \lambda (3x + u)$$

$$L_1 = x^2 + 2x + 16 y^2 + 3 \lambda x$$

$$L_2 = u^2 + 2/3 u - 2/3 w^2 + 4/3 w + \lambda u$$

au premier niveau :

minimaliser L_1 et L_2 entraîne :

$$x^* = -\frac{2+3\lambda}{10} \quad \text{et} \quad u^* = \frac{2-3\lambda}{2}$$

et au deuxième niveau il faut s'assurer que $3x + u = 0$, ce qui entraîne :

$$-3 \frac{2+3\lambda}{10} + \frac{2-3\lambda}{2} = 0$$

donc : $\lambda = 1/6$
 $x = -1/4$
 et $u = 3/4$

3,22 - Pour les interactions de critère, nous avons :

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = 0$$

$$J = J_1 + J_2 + J_{12}$$

Introduisons, comme précédemment, une pseudo-variable s à la place de z_1 qui permettra d'écrire :

$$J = J_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{z}_1) + J_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{z}_2) + J_{12}(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$$

sous la forme :

$$\begin{aligned} J' &= J_1 + J_2 + J_{12}(x, z_2) \\ &= J'_1(\underline{x}_1, \underline{u}_1, \underline{z}_1) + J'_2(\underline{x}_2, \underline{u}_2, \underline{z}_2, \underline{s}) \end{aligned}$$

Le fait que $z_1 = s$ n'étant pas respecté a priori, il faut introduire une nouvelle contrainte égalité :

$$s - z_1 = 0$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Exemple : $J = x^2 + 4x + 4xu + u^2 + 2u$

Posons $u = s$ dans le terme en xu :

$$J' = x^2 + 4x + 4xs + u^2 + 2u$$

$$L' = x^2 + 4x + 4xs + u^2 + 2u + \lambda(s-u)$$

$$L'_1 = x^2 + 4x + 4xs + \lambda s$$

$$L'_2 = u^2 + 2u - \lambda u$$

1er niveau : Minimalisons L_1 d'où $x^* = -\lambda/4$
 et $s^* = \frac{\lambda-8}{8}$

$$\text{Minimalisons } L_2 \text{ d'où } u^* = \frac{\lambda-2}{2}$$

2ème niveau : Vérifions la pseudo-contrainte $s = u$

$$\frac{\lambda-8}{8} = \frac{\lambda-2}{2} \text{ d'où } \lambda = 0, \text{ ce qui donne } u = -1$$

$$x = 0$$

En conclusion, ce chapitre nous a permis d'exposer de façon très simple les méthodes essentielles de coordination, en les illustrant de petits exemples statiques. L'utilisateur de ces méthodes ne devra cependant pas se laisser leurrer par leur apparente facilité.

Tout d'abord, notons que les principes de coordination ne fournissent pas d'algorithmes de recherche. Et c'est là leur grande faiblesse. Dans une application plus détaillée, qui concerne le chapitre suivant, nous verrons comment on peut se ramener à l'utilisation d'algorithmes connus.

Il est aussi possible que l'on ait avantage à utiliser des méthodes composées de deux méthodes fondamentales et que l'on agisse à la fois sur le modèle et sur le critère. C'est ce que nous ferons au troisième chapitre intitulé "commande quadratique hiérarchisée".

Ces méthodes, nous l'avons précisé, s'appliquent aussi bien aux systèmes statiques qu'aux systèmes dynamiques. Cependant, leur nature itérative implique la mémorisation de trajectoire et donc d'un grand nombre de points. Il n'est pas certain qu'alors une méthode hiérarchique soit forcément plus performante qu'une méthode particulière très élaborée. Mais elle permettra sans doute d'employer des algorithmes simples et c'est là son principal avantage.

Chapitre 2

UN PROGRAMME DE CALCUL HIERARCHISE DE COMMANDE OPTIMALE EN PRESENCE DE CONTRAINTES DE TYPE BORNE SUR LA COMMANDE ET SUR L'ETAT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE DISCRET

1 - POSITION DU PROBLEME -

Considérons un système dynamique discret décrit par une équation d'état matricielle linéaire.

$$\underline{x}_{K+1} = A \underline{x}_K + B \underline{u}_K$$

$\underline{x}_K$: vecteur d'état à l'instant k

$\underline{u}_K$: vecteur de commande à l'instant k

De plus, $\underline{x}_K$ et $\underline{u}_K$ doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\underline{x}_{\text{MIN}} \leq \underline{x}_K \leq \underline{x}_{\text{MAX}}$$

$$\underline{u}_{\text{MIN}} \leq \underline{u}_K \leq \underline{u}_{\text{MAX}}$$

(contraintes de type borne)

Posons alors le problème :

Minimaliser par rapport à $\underline{u}_K$, pour $K \in [0, N]$, le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{K=0}^{K=N} \left[\underline{x}_K^T Q \underline{x}_K + \underline{u}_K^T R \underline{u}_K \right]$$

les matrices Q et R étant diagonales. D'autre part, on admet que $\underline{x}_0$ est fixé et que $\underline{x}_N$ est libre.

Ceci revient à une optimisation statique à N+1 composantes (les différents $\underline{u}_K$) en présence de contraintes égalité et de contraintes inégalité sur l'état et sur la commande.

La théorie de l'optimisation dynamique fournit les conditions nécessaires dans ce cas. Mais la vérification de ces conditions entraîne à choisir une forme de trajectoire dont on choisit ensuite les paramètres correctement. Le problème est déjà difficile quand on choisit la bonne forme de trajectoire.

Il devient inextricable si on n'en a aucune connaissance a priori.

2 - DECOMPOSITION -

Nous allons opérer à une partition du problème suivant le temps discrétisé, ce qui nous fournit N+1 sous-problèmes dont les variables respectives sont couplées par l'équation d'état.

Nous choisirons la coordination de ces sous-problèmes par intervention sur le critère. Nous écrivons donc le Lagrangien :

$$L = J + \sum_{K=0}^{N-1} \lambda_K^T (\underline{x}_{K+1} - A \underline{x}_K - B \underline{u}_K)$$

Si, comme le veut la méthode, nous fixons tous les λ_K , nous pouvons découpler le Lagrangien et écrire :

$$L = L_0 + L_1 + \dots + L_K + \dots + L_{N-1} + L_N$$

avec :

$$L_0 = \frac{1}{2} (\underline{x}_0^T Q \underline{x}_0 + \underline{u}_0^T R \underline{u}_0) + \lambda_0^T (\underline{x}_1 - A \underline{x}_0 - B \underline{u}_0)$$

$$L_K = \frac{1}{2} (\underline{x}_K^T Q \underline{x}_K + \underline{u}_K^T R \underline{u}_K) + \lambda_K^T (\underline{x}_{K+1} - A \underline{x}_K - B \underline{u}_K)$$

$$L_N = \frac{1}{2} (\underline{x}_N^T Q \underline{x}_N + \underline{u}_N^T R \underline{u}_N)$$

Il y a donc interaction entre chacun des éléments du Lagrangien, mais, si les λ_K sont fixés, on peut arranger le Lagrangien de la façon suivante :

$$L'_0 = \frac{1}{2} (\underline{x}_0^T Q \underline{x}_0 + \underline{u}_0^T R \underline{u}_0) + \lambda_0^T (-A \underline{x}_0 - B \underline{u}_0)$$

$$L'_1 = \frac{1}{2} (\underline{x}_1^T Q \underline{x}_1 + \underline{u}_1^T R \underline{u}_1) + \lambda_0^T \underline{x}_1 + \lambda_1^T (-A \underline{x}_1 - B \underline{u}_1)$$

etc...

$$L'_K = \frac{1}{2} (\underline{x}_K^T Q \underline{x}_K + \underline{u}_K^T R \underline{u}_K) + \lambda_{K-1}^T \underline{x}_K + \lambda_K^T (-A \underline{x}_K - B \underline{u}_K)$$

jusqu'à :

$$L'_{N-1} = \frac{1}{2} (\underline{x}_{N-1}^T Q \underline{x}_{N-1} + \underline{u}_{N-1}^T R \underline{u}_{N-1}) + \lambda_{N-2}^T \underline{x}_{N-1} + \lambda_{N-1}^T (-A \underline{x}_{N-1} - B \underline{u}_{N-1})$$

et :

$$L'_N = \frac{1}{2} (\underline{x}_N^T Q \underline{x}_N + \underline{u}_N^T R \underline{u}_N) + \lambda_{N-1}^T \underline{x}_N$$

ceci nous donne immédiatement : $\underline{u}_N = 0$

3 - PROBLEMES DU PREMIER NIVEAU -

Les N+1 problèmes du premier niveau sont alors très simplement définis : pour chaque sous-problème SPI :

$$\min_{\underline{x}_i, \underline{u}_i} L'_i \quad \text{tous les } \lambda_K \text{ étant fixés}$$

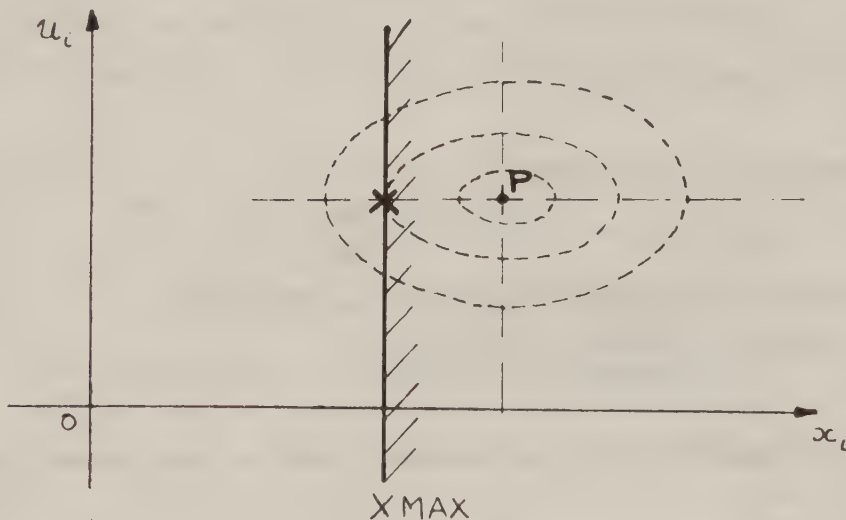
et en respectant les contraintes inégalité :

$$\underline{X}_{\text{MIN}} \leq \underline{x}_i \leq \underline{X}_{\text{MAX}}$$

$$\underline{U}_{\text{MIN}} \leq \underline{u}_i \leq \underline{U}_{\text{MAX}}$$

Nous remarquons alors que la forme de L'_i est quadratique en $\underline{x}_i$ et $\underline{u}_i$, sans termes rectangles puisque les matrices Q et R sont diagonales.

Les ellipsoïdes de niveau ont donc alors des axes parallèles aux axes de recherche et la prise en compte des contraintes de type borne se réduit alors à un simple test sur le point optimal que l'on trouve en ne tenant pas compte des contraintes. Par exemple, pour un système à un état et une commande, nous aurons :



$\begin{cases} \tilde{x}_i \\ \tilde{u}_i \end{cases}$ valeurs optimales en l'absence de contraintes

si $\tilde{x}_i > X_{\text{MAX}}$

alors $x_i^{\circ} = X_{\text{MAX}}$

$u_i^{\circ} = \tilde{u}_i$ en présence de contraintes

4 - PROBLEME DE COORDINATION AU DEUXIEME NIVEAU -

Au deuxième niveau revient la tâche de choisir les $\underline{\lambda}_K$ de façon à ce que l'équation d'état $\underline{x}_{K+1} = A \underline{x}_K + B \underline{u}_K$ soit respectée. Le principe d'équilibrage de l'interaction ne fournit pas d'algorithmes. C'est pourquoi nous avons dû faire appel à une notion qui dépasse le cadre des problèmes quadratiques : la notion de fonction duale

4,1 - Formulation du problème d'optimisation à l'aide de la fonction duale

La méthode de recherche des paramètres $\underline{\lambda}_K$ corrects consistera à essayer de trouver le maximum d'une fonction appelée fonction duale et non à respecter directement les équations d'interaction.

Le problème d'optimisation étant posé de la façon suivante sous la forme la plus générale :

Minimaliser $J(\underline{x})$ pour $\underline{x} \in S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$

avec $S_1 \subset E^n$

$$S_2 = \{\underline{x} \mid \underline{F} = 0\}$$

$$S_3 = \{\underline{x} \mid \underline{R} \leq 0\}$$

Si on écrit le Lagrangien :

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = J \underline{x} + \underline{\lambda}^T \underline{F} + \underline{\mu}^T \underline{R}$$

on peut alors définir la fonction duale par la relation :

$$h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \underset{\underline{x} \in S_1}{\text{Minimum}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$$

Cette fonction définit un domaine D dans le sous-espace constitué par $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$:

$$D = \{\underline{\lambda}, \underline{\mu} \mid h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \text{ existe}\}$$

La fonction duale, pour une valeur donnée de $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$, est donc le minimum du Lagrangien par rapport à $\underline{x}$. Il n'est pas nécessaire alors que $\underline{x}$ respecte F et R.

Dans notre cas, si nous respectons a priori R au premier niveau, il restera seulement la relation F à respecter, donc la fonction duale ne dépendra que de $\underline{\lambda}$.

Il est nécessaire de définir le domaine D car il n'est pas évident a priori que le Lagrangien présente un minimum fini pour n'importe quelle valeur de $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$.

Définition du problème dual

Le problème dual se définit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Maximaliser } h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \\ &(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \in D \end{aligned}$$

et on démontre alors que :

Théorème : si $\underline{\lambda}^0$ et $\underline{\mu}^0$ maximalisent la fonction duale et si $\underline{x}^0$ est la valeur correspondante qui minimalise le Lagrangien.

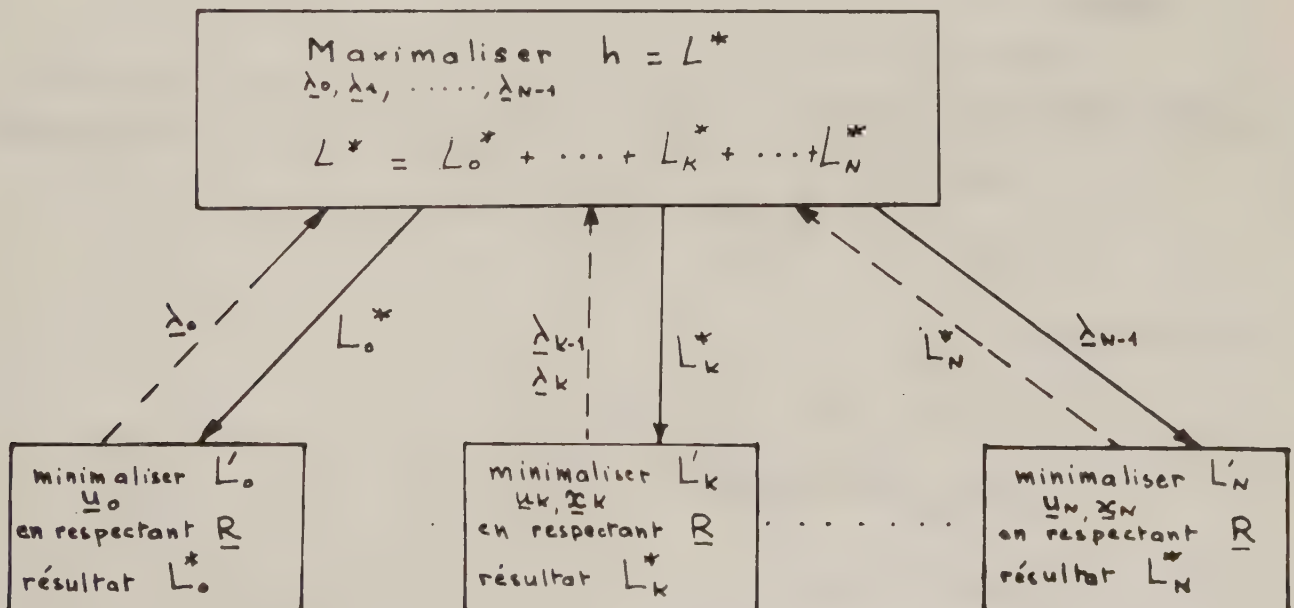
Alors : - $\underline{x}^0$ est solution du problème global défini par J , $\underline{F}$ et $\underline{R}$.
 - $h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = J(\underline{x}^0)$

La procédure consiste donc à rechercher un "maximum" ou "point selle" du Lagrangien en cherchant d'abord son minimum par rapport à $\underline{x}$, $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ étant considérés comme des paramètres, et en cherchant ensuite le maximum de la fonction duale obtenue par rapport à ces paramètres.

Ces résultats sont exposés en détail en annexe.

4,2 - Application au problème donné

Le schéma est alors suffisant pour montrer comment cette notion de fonction duale s'applique au calcul hiérarchique de trajectoire optimale :



On a donc remplacé le problème du respect des équations d'état par un problème d'optimisation sans contrainte dont les variables sont les λ_K .

L'avantage de cette formulation est de permettre l'utilisation d'algorithmes éprouvés de programmation non linéaire (notons, en effet, que la fonction duale n'est ni linéaire, ni quadratique, en raison des contraintes observées au premier niveau).

Nous avons essayé plusieurs algorithmes pour résoudre le problème de coordination :

- des algorithmes de recherche directe, tel celui de HOOKE et JEEVES,
- des algorithmes de recherche indirecte nécessitant le calcul de gradients, telle la méthode de FLETCHER et POWELL ou méthode des gradients conjugués.

Dans notre cas (critère quadratique, système linéaire et contraintes de type borne), la méthode des gradients conjugués s'est révélée la plus performante. L'initialisation de la recherche a été assurée par les valeurs des λ_K qui seraient optimales en l'absence de contraintes. Ces valeurs sont obtenues simplement par un calcul matriciel traduisant les conditions de stationnarité alors utilisables de la fonction duale.

5 - EXEMPLE -

Nous avons choisi un exemple très simple mais qui pose déjà des problèmes difficiles en présence de contraintes sur les commandes et sur les états :

$$\begin{vmatrix} y_{K+1} \\ x_{K+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_K \\ x_K \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u_K$$

avec le critère :

$$J = \sum_{K=0}^{K=10} (\alpha y_K^2 + \beta x_K^2 + \gamma u_K^2)$$

x_0 et y_0 étant donnés

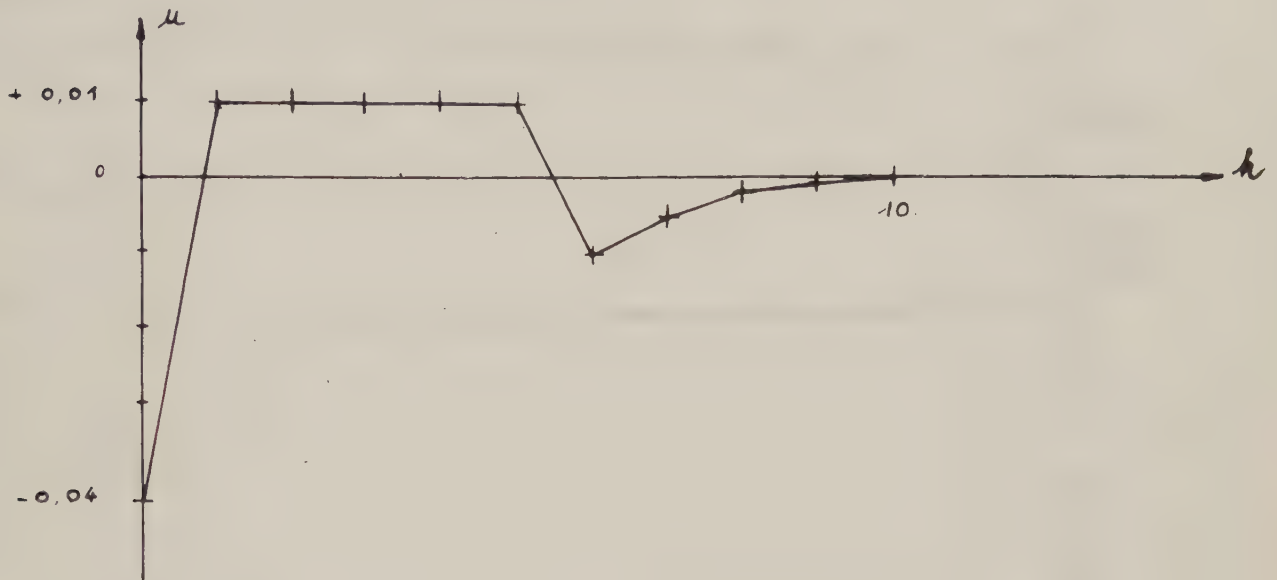
avec :

$$X_{\text{MIN}} \leq x_K \leq X_{\text{MAX}}$$

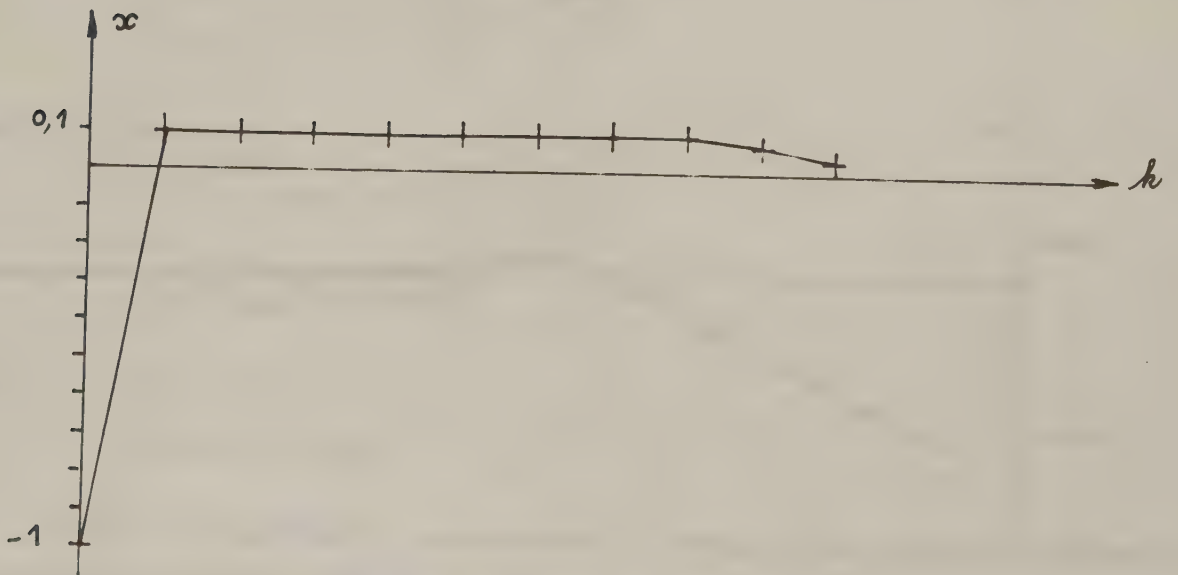
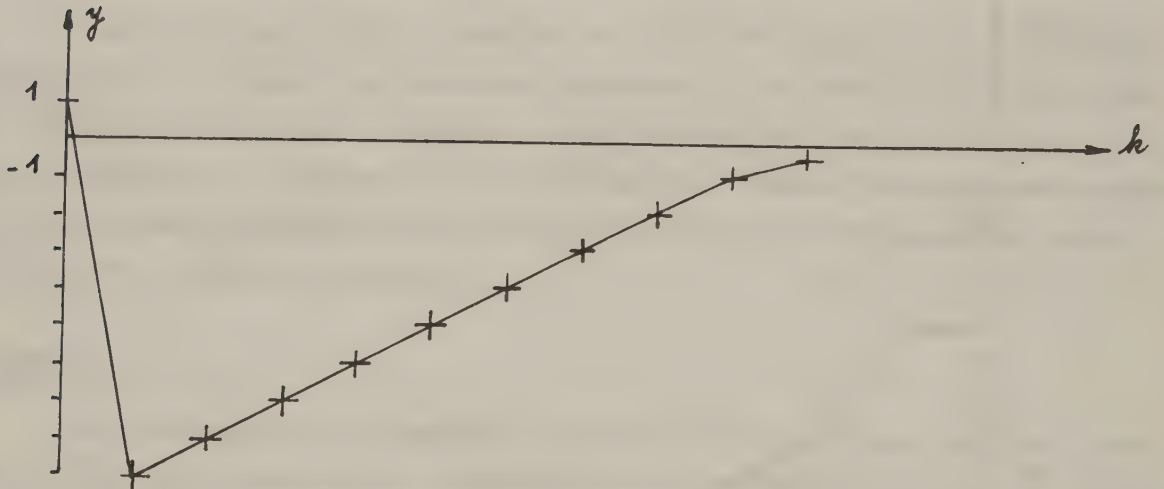
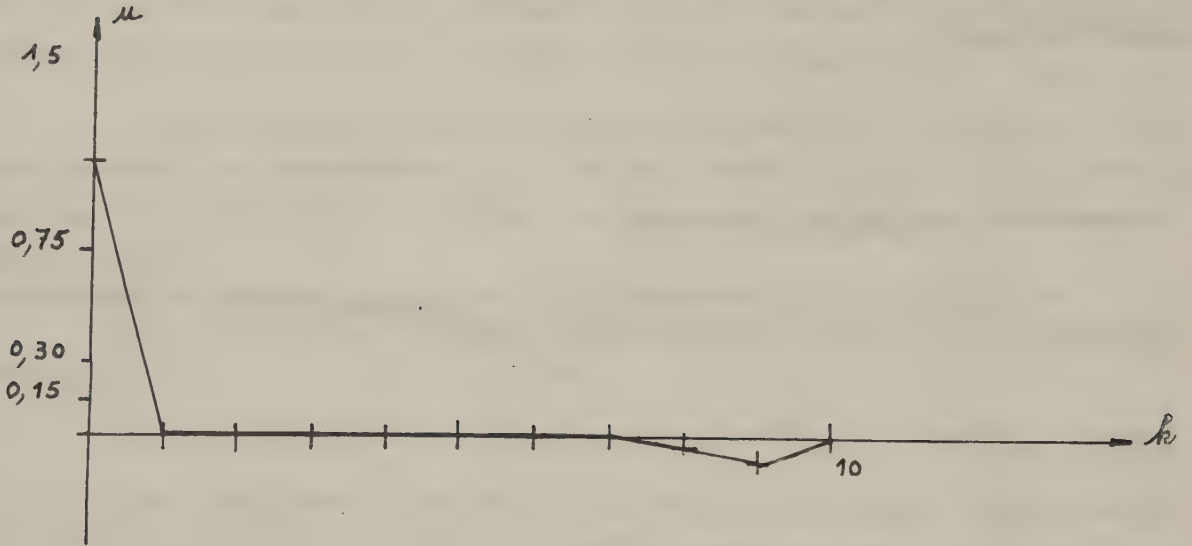
$$Y_{\text{MIN}} \leq y_K \leq Y_{\text{MAX}}$$

En utilisant pour le coordinateur la méthode des gradients conjugués, le temps de calcul de la solution optimale, y compris la phase d'initialisation et l'impression des résultats, est de l'ordre de cinq minutes sur IBM 360/30.

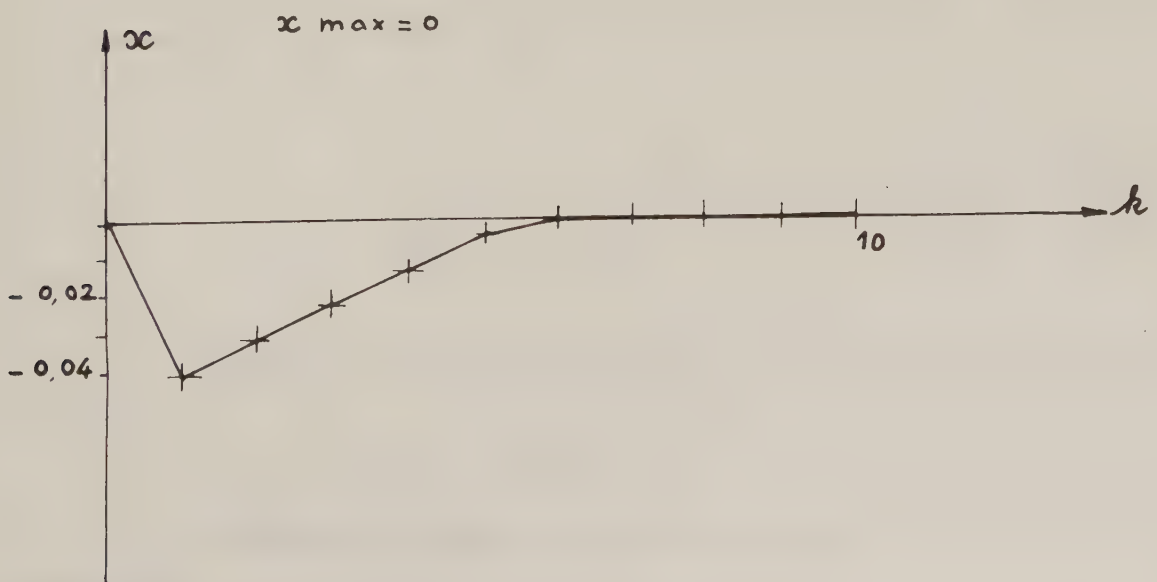
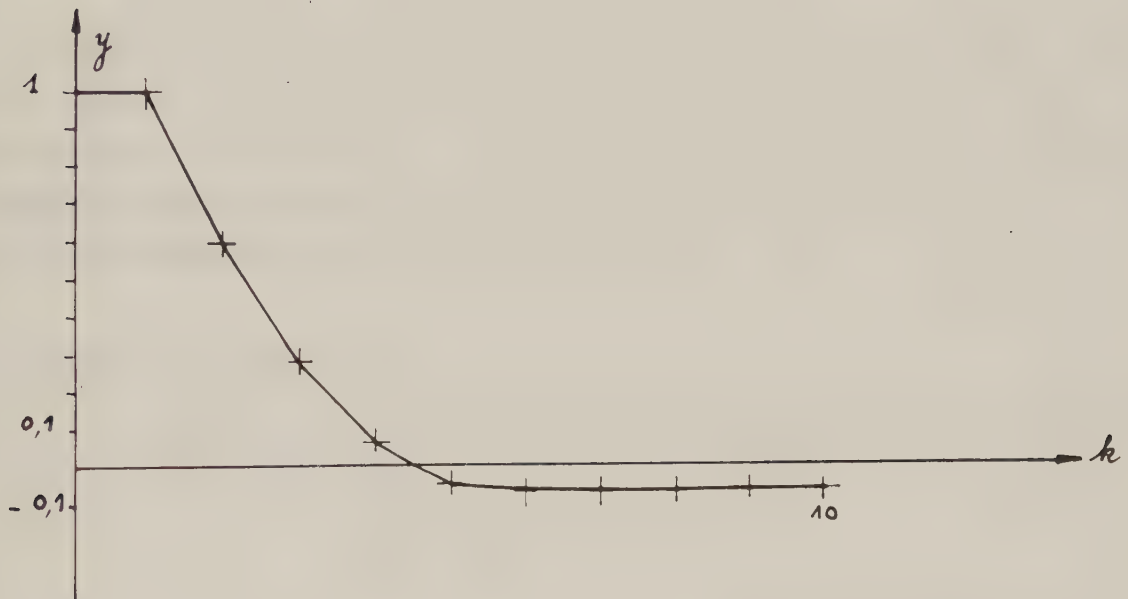
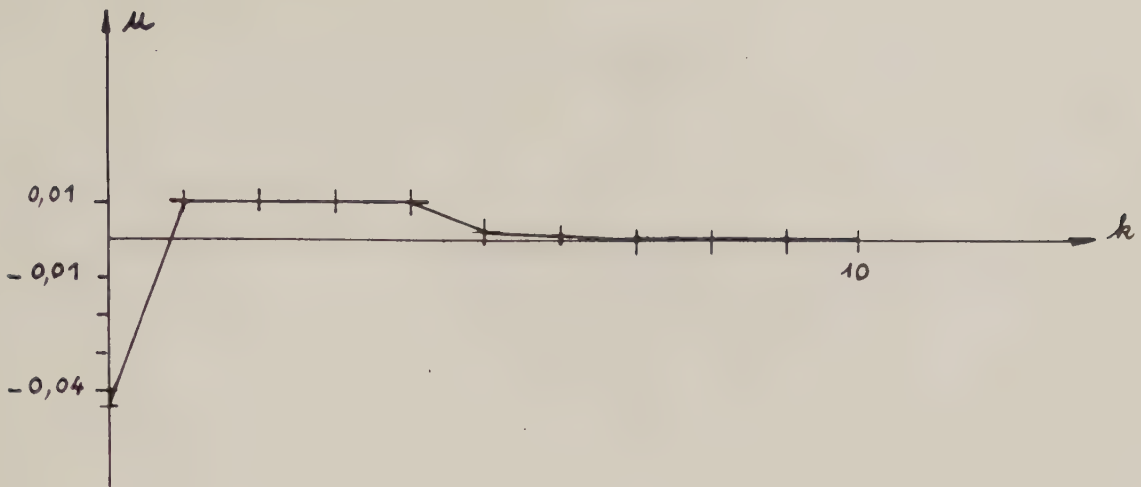
Les schémas suivants montrent quelques résultats dans les cas les plus caractéristiques.



Contrainte uniquement sur la commande u



Contrainte uniquement sur l'état x



Contrainte sur l'état et sur la commande

ANNEXE

RAPPEL DES RESULTATS FONDAMENTAUX DE L'OPTIMALISATION DE FONCTIONS (OPTIMALISATION STATIQUE)

Les résultats utilisés au chapitre précédent, en particulier ceux qui concernent la fonction duale, nécessitent quelques explications supplémentaires. Notre ambition ne sera pas d'exposer tout ce que l'on appelle "Programmation mathématique" avec une grande rigueur, mais seulement de montrer comment les notions utilisées ici se rattachent à des théories connues dont la plus récente est celle développée par KUHN et TUCKER (1961).

A-1 - Position du problème

Il s'agit de minimaliser, par rapport à ses arguments groupés dans le vecteur $\underline{x}$, une fonction $J(\underline{x})$:

$$\min_{\underline{x}} J(\underline{x})$$

Le vecteur $\underline{x}$ est soumis à un ensemble de contraintes, symbolisées par trois ensembles auxquels doit appartenir $\underline{x}$:

$$\underline{x} \in S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$$

avec : $S_1 \subseteq E^n$ (les composantes de $\underline{x}$ sont des nombres réels)

$$S_2 = \{\underline{x} \mid \underline{F} = 0\}$$

F représente un ensemble de relations de type égalité que doit vérifier $\underline{x}$

$$S_3 = \{\underline{x} \mid \underline{R} \leq 0\}$$

R représente un ensemble de relations de type inégalité que doit respecter $\underline{x}$

A-2 - Problème sans contraintes

Dans le cas où les relations F et R sont absentes et si les dérivées de J par rapport à toutes les composantes de $\underline{x}$ existent et sont continues (il n'est pas nécessaire pour autant qu'elles soient explicites), alors pour que $\underline{x}^0$ soit la solution du problème, il est nécessaire que $\underline{J}_{\underline{x}} = \underline{0}$, c'est-à-dire que le gradient de J par rapport à $\underline{x}$ soit nul (condition de stationnarité) ;

- en effet : $J(\underline{x}^0 + \delta \underline{x}) \geq J(\underline{x}^0)$ si $\delta \underline{x}$ représente une variation de $\underline{x}$

- en développant, on obtient :

$$J(\underline{x}^0) + \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} + 0 \text{ d'ordre } 2 \geq J(\underline{x}^0)$$

$$\text{donc : } \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} \geq 0 \text{ quel que soit } \delta \underline{x} \in S_1$$

ce qui nécessite $\underline{J}_{\underline{x}} = \underline{0}$

De plus, pour que nous ayons affaire à un minimum, il faut que la matrice des dérivées secondes, notée J_{xx} , soit définie NON NEGATIVE :

développons au second ordre :

$$J(\underline{x}^0) + \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} + \frac{1}{2} \delta^T \underline{x} J_{xx} \delta \underline{x} \geq J(\underline{x}^0)$$

le second terme étant nul,

le troisième étant une forme quadratique en $\delta \underline{x}$,

il faut que J_{xx} soit définie non négative.

Dans le cas particulier où $J(\underline{x})$ est une fonction strictement convexe, la condition de stationnarité est suffisante.

A-3 - Introduction des contraintes

A-31 - Contraintes de type égalité

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0} \text{ vecteur de dimension } p < n$$

(p contraintes indépendantes)

La condition de stationnarité peut s'écrire pour une variation $\delta \underline{x}$:

$$J(\underline{x}^0) + \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} \geq J(\underline{x}^0)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} \geq 0 \quad \forall \delta \underline{x} \quad \text{donc} \quad \underline{J}_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} = 0$$

et, d'autre part, on peut développer $\underline{F}(\underline{x})$:

$$\underline{F}(\underline{x}^0 + \delta \underline{x}) = \underline{F}(\underline{x}^0) + \underline{F}_x^T \delta \underline{x} + \dots$$

or : $\underline{F}(\underline{x}^0) = \underline{0}$

et : $\underline{F}(\underline{x}^0 + \delta \underline{x}) = \underline{0}$

donc : $\underline{F}_x^T \delta \underline{x} = \underline{0}$

On en déduit que :

- les $\delta \underline{x}$ sont tangents à la surface de contrainte

- les gradients sont normaux à cette surface :

si on appelle f_i chaque composante de $\underline{F}$, nous avons :

$$\underline{f}_{ix}^T \delta \underline{x} = 0 \quad \text{quel que soit } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } p$$

Les vecteurs $\underline{f}_{ix}$ sont donc tous normaux et, du fait de l'indépendance des contraintes, forment une base de l'espace normal à la surface de contrainte.

Le gradient $\underline{J}_x$, étant également normal à cette surface, doit s'exprimer dans cette base à l'aide des composantes λ_i .

$$\underline{J}_x = - \sum_i \lambda_i \underline{f}_{ix} \quad (\text{le signe } - \text{ est arbitraire})$$

ou encore : $\underline{J}_x + \sum_i \lambda_i \underline{f}_{ix} = \underline{0}$

Cette nouvelle condition de stationnarité peut être obtenue en annulant le gradient d'une fonction L définie par :

$$\begin{aligned} L &= J + \sum_i \lambda_i f_i \\ &= J + \underline{\lambda}^T \underline{F} \end{aligned}$$

Cette fonction appelée Lagrangien, mise à la place du critère J , permet de remplacer un problème avec contraintes du type égalité par un problème sans contraintes.

Nous sommes passés d'un problème à n inconnues avec contraintes à un problème à $n+p$ inconnues (les composantes de $\underline{x}$ et les composantes de $\underline{\lambda}$) mais nous avons également :

$$\begin{aligned} n \text{ équations : } \underline{L}_x &= \underline{0} \\ +p \text{ équations : } \underline{F} &= \underline{0} \end{aligned}$$

Les paramètres de Lagrange ne sont donc qu'un artifice pratique permettant de restructurer le problème sous une forme plus simple.

A-32 - Contraintes du type inégalité

Elles sont définies par l'ensemble S_3 :

$$S_3 = \{x \mid \underline{R}(x) \leq 0\} \quad \underline{R} : \text{dimension } q < n$$

On cherche là encore à se ramener à un problème connu : celui du cas précédent.

Une méthode consiste à utiliser l'artifice de Valentine qui introduit des variables supplémentaires en nombre q : les variables y_i , et à écrire que $r_i \leq 0$ est équivalent à $r_i + y_i^2 = 0$.

y_i n'est pas déterminé a priori mais, si l'équation est vérifiée, on sera sûr que $r_i \leq 0$.

On peut alors écrire le Lagrangien :

$$L = J + \sum_i \mu_i (r_i + y_i^2)$$

μ_i : pseudo-paramètres de Lagrange associés à la pseudo-contrainte égalité $r_i + y_i^2 = 0$.

On aura alors :

$$\underline{L}_x = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{J}_x + \sum_i \mu_i \underline{r}_{ix} = 0$$

$$\text{et} \quad \underline{L}_y = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2 \mu_i y_i = 0$$

ceci pour tout i compris entre 1 et q .

Nous pouvons en déduire que :

- si $y_i = 0$, c'est-à-dire si $r_i = 0$ (contrainte atteinte),
alors $\mu_i \neq 0$
- si $y \neq 0$ (en dehors de la contrainte)
 $\mu_i = 0$

Pour préciser les conditions sur μ_i , il est nécessaire d'établir la condition du second ordre :

L_{xx} définie non négative

Elle s'écrit encore :

$$\underline{\delta x}^T \underline{J}_{xx} \underline{\delta x} + \sum_i 2 \mu_i \delta y_i^2 \geq 0$$

pour toutes les variations $\underline{\delta x}$ et δy_i .

Comme J_{xx} doit déjà être définie non négative, on en déduit que, lorsque μ_i n'est pas nul, il doit être positif :

$$\mu_i \geq 0$$

Notons qu'alors la condition de stationnarité du problème sans contrainte $J_{-x} = 0$ n'est plus vérifiée ; si la contrainte est atteinte, nous avons : $J_{-x} > 0$.

A-4 - Résumé des conditions de stationnarité

En présence de la totalité des contraintes :

$$\underline{x} \in S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$$

$$S_1 \leq E^n \quad (\text{contrainte du type inégalité si } S_1 \neq E^n)$$

$$\underline{F} = 0$$

$$\underline{R} \leq 0$$

si on veut minimaliser le critère J , on forme le Lagrangien :

$$L = J + \underline{\lambda}^T \underline{F} + \underline{\mu}^T \underline{R}$$

et, en minimalisant ce Lagrangien, on obtient alors pour la solution $\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ les conditions :

$$\underline{L}_x(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) \geq 0$$

$$\underline{x}^{0T} \underline{L}_x(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = 0$$

$$\underline{F}(\underline{x}^0) = \underline{0}$$

$$\underline{R}(\underline{x}^0) \leq 0$$

$$\underline{\mu}^{0T} \underline{R} = 0$$

$$\mu_i^0 \geq 0 \quad \text{quel que soit } i$$

La condition $\underline{L}_x \geq 0$ devient $\underline{L}_x = 0$ si $S_1 = E^n$ (pas d'autres contraintes que $\underline{F}$ et $\underline{R}$).

On peut montrer que ces conditions ne s'appliquent que si les fonctions comprises dans $J, \underline{F}$ et $\underline{R}$ sont dérivables et à dérivées continues.

Par exemple, si le domaine S_3 présente un "coin", $\underline{R}$ n'a pas de dérivées continues et les conditions de stationnarité sont mises en défaut.

A-5 - Notion de "point selle" ou "point col" ou MINIMAX

On dit qu'une fonction de deux vecteurs $H(\underline{x}, \underline{y}, \dots)$ présente une "selle" ou un "col" au point $(\underline{x}^0, \underline{y}^0, \dots)$ si elle vérifie la relation :

$$H(\underline{x}^0, \underline{y}) \leq H(\underline{x}^0, \underline{y}^0) \leq H(\underline{x}, \underline{y}^0)$$

c'est-à-dire si elle est à la fois en ce point :

minimum par rapport à x

et maximum par rapport à y

Cette notion nous sera utile pour écrire de nouvelles conditions d'optimalité qui préciseront l'effet des paramètres de Lagrange et de Kuhn et Tucker.

A-6 - Théorème du Minimax

Le théorème du Minimax permet de formuler la solution du problème d'optimisation en présence de contraintes égalités et inégalités non plus sous forme de conditions algébriques d'optimalité, mais sous forme d'une double extrêmatisation.

Il peut s'énoncer de la façon suivante :

Si $\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ représentent les valeurs optimales de x, λ, μ , elles vérifient les conditions suivantes :

- les μ_i étant imposés positifs
- $\underline{x}^0$ minimalise le Lagrangien sur S_1 , donc $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) \leq L(\underline{x}, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$
- et d'autre part, pour tout couple (λ, μ) non optimal :

$$L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$$

donc le Lagrangien présente un minimax :

$$L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) \leq L(\underline{x}, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$$

La partie droite n'est rien d'autre que la formulation issue de la minimalisation du Lagrangien :

- il faut montrer que si, et seulement si, la partie gauche est vérifiée, alors $\underline{x}^0$ vérifie les contraintes :

$$f_i(\underline{x}^0) = 0$$

$$r_i(\underline{x}^0) \leq 0$$

et la condition de Kuhn et Tucker est vérifiée : $\mu_i^0 g_i(\underline{x}^0) = 0$ que que soit i

Condition nécessaire : condition préliminaire : $\mu_i \geq 0$

Hypothèse : $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$

Conclusion :
$$\begin{cases} f_i(\underline{x}^0) = 0 \\ r_i(\underline{x}^0) \leq 0 \\ \mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) = 0 \end{cases}$$

Développons :

$$J(\underline{x}^0) + \sum \lambda_i f_i(\underline{x}^0) + \sum \mu_i r_i(\underline{x}^0) \leq J(\underline{x}^0) + \sum \lambda_i^0 f_i(\underline{x}^0) + \sum \mu_i^0 r_i(\underline{x}^0)$$

Soit encore :

$$\sum (\lambda_i - \lambda_i^0) f_i(\underline{x}^0) + \sum (\mu_i - \mu_i^0) r_i(\underline{x}^0) \leq 0$$

λ_i étant libre si $f_i(\underline{x}^0)$ est non nul, l'inégalité peut ne pas être respectée $\longrightarrow$ il faut donc que $f_i(\underline{x}^0) = 0$

De même, μ_i étant seulement astreint à être positif ou nul, si $r_i(\underline{x}^0)$ est positif, l'inégalité peut être violée $\longrightarrow$ il faut donc que $r_i(\underline{x}^0) \leq 0$ et en particulier, si $\mu_i = 0$, $f_i(\underline{x}^0)$ étant nul, l'inégalité entraîne :

$$\begin{aligned} -\mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) &\leq 0 \\ \text{ou} \quad \mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque μ_i^0 doit être positif et $r_i(\underline{x}^0) \leq 0$, il ne reste qu'une possibilité :

$$\mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) = 0$$

Condition suffisante : condition : $\mu_i \geq 0$

Hypothèse :
$$\begin{cases} f_i(\underline{x}^0) = 0 \\ r_i(\underline{x}^0) \leq 0 \\ \mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$

Il suffit de développer $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$:

$$L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = J(\underline{x}^0) + \sum \lambda_i f_i(\underline{x}^0) + \sum \mu_i r_i(\underline{x}^0)$$

Le second terme est nul

Le troisième est négatif

donc : $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x}^0)$

or, si de plus : $\mu_i^0 r_i(\underline{x}^0) = 0$

$$J(\underline{x}^0) = L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$$

donc : $L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$

Le théorème est démontré.

A-6 - Usage de la fonction duale

Définition de la fonction duale :

$$h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \min_{\underline{x} \in S_1} L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \quad \text{avec} \quad \mu_i \geq 0$$

c'est-à-dire que, pour chaque couple $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$, on cherche la valeur minimum de L sur S_1 et on appelle cette valeur h .

Définition du problème dual :

D étant le domaine en $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$ pour lequel la fonction duale existe, on cherche à maximaliser h par rapport à $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$.

Le théorème de la fonction duale affirme que les valeurs de $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ trouvées alors ne sont rien d'autre que $\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ et que $\underline{x}$ correspondant est la valeur cherchée $\underline{x}^0$ du problème avec les contraintes définies par $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$.

Théorème préliminaire $h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$

En effet : $h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$ par définition

et si $\underline{x} \in S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$:

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = J(\underline{x}) + \sum \mu_i r_i(\underline{x})$$

Le second terme est négatif

donc : $L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x})$

donc a fortiori : $h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x})$

à condition bien sûr que h existe (ce qui n'est pas prouvé pour toute valeur du couple $(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$).

Théorème de la fonction duale :

Si le théorème du Minimax est vérifié pour $(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$:

- $\underline{x}^0$ est la solution du problème initial
- $\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ maximalise la fonction duale
- $h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = J(\underline{x}^0)$

Hypothèse : $(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0)$ est un point de Minimax

$\underline{x}^0$ est solution du problème initial

Conclusion : $\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ maximalise la fonction duale

$$h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = J(\underline{x}^0)$$

- $\underline{x}^0$ est solution du problème (voir paragraphe précédent)

$$- h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = J(\underline{x}^0)$$

$$h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) = J(\underline{x}^0) + \sum \lambda_i^0 f_i(\underline{x}^0) + \sum \mu_i^0 r_i(\underline{x}^0)$$

en effet, d'après le théorème du minimax, les deux derniers termes sont nuls.

- $\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0$ maximalise la fonction duale

on sait (voir théorème préliminaire) que :

$$h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x}) \text{ quel que soit } \underline{x}$$

$$\text{donc : } h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq J(\underline{x}^0)$$

$$\text{donc : } h(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \leq h(\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) \text{ et } (\underline{\lambda}^0, \underline{\mu}^0) \text{ maximalise } h.$$

Bibliographie des chapitres 1 et 2

- D.A. WISMER, Editor - "Optimization methods for large scale systems"
Mc Graw Hill, 1971
- LEONDES, Editor - "Advances in control systems"
ch.3 par E.S. BAUMAN, Academic Press, 1968
- MESAROVIC, MACKO, TAKAHARA - "Two coordination principles and their applications
to large scale control systems"
I.F.A.C. Varsovie, 1969
- D. MACKO - "General systems theory approach to multilevel systems"
SRC Case WR University, 1967, Cleveland, Ohio
- Y. TAKAHARA - "Multilevel systems and uncertainties"
SRC Case WR University, 1967, Cleveland, Ohio
- MESAROVIC, MACKO, TAKAHARA - "A general theory of hierarchical, multilevel systems"
Academic Press, 1971
- MAYA, BRONZSTEJN - "Commande hiérarchisée"
Rapport interne E.N.S.M., 1971
- B. CHENEVEAUX - "Introduction aux méthodes hiérarchiques"
Annales de l'E.N.S.M., 1970

Chapitre 3

COMMANDE HIERARCHISEE QUADRATIQUE

Introduction

Les principes de commande hiérarchisée donnés dans le chapitre précédent permettent de calculer, à l'aide d'algorithmes itératifs, la commande optimale d'un système dynamique, la trajectoire optimale des états et ce qui est particulier à notre objet, les grandeurs dynamiques de coordination. La procédure utilisée est itérative et chaque itération effectuée à un certain niveau comprend un certain nombre d'itérations au niveau inférieur. Sauf pour le cas de processus très lents, cette méthode est d'une application très hasardeuse en ligne.

De plus, elle suppose que l'on puisse mémoriser un grand nombre d'informations et donc que l'on utilise un ordinateur important.

C'est pourquoi, quand on se limite à l'ambition de réaliser une régulation industrielle d'un système très complexe, sans critère de performance impérativement défini, on a souvent utilisé le formalisme de l'optimisation quadratique pour synthétiser des systèmes bouclés qu'il est possible de mettre en oeuvre d'une manière assez proche des méthodes classiques, mais plus souple, plus performante, plus générale que la simple juxtaposition de nombreuses régulations monovariabiles.

Cette façon de poser le problème conduit à une structure bouclée, dans laquelle l'ensemble des commandes du processus est élaboré à partir de l'ensemble des états. Ce qui présente, du point de vue pratique, un inconvénient grave dans le cas des systèmes complexes : ou le système entier fonctionne correctement, ou il faut commuter l'ensemble sur un second système de commande (commandes manuelles ou régulations classiques) dès qu'un défaut apparaît. C'est pourquoi, la plupart des systèmes de commande très élaborés restent doublés par des systèmes classiques.

La régulation hiérarchisée ou commande hiérarchisée en ligne se propose d'éviter cet inconvénient en commandant un système complexe par "niveaux". Au premier niveau, nous commanderons chacune des parties du système par des régulations assez simples, sinon tout-à-fait classiques, indépendantes les unes des

autres. Au second niveau, un coordinateur sera chargé d'agir sur ces régulations pour que le fonctionnement du processus, considéré globalement, soit correct.

Cette nouvelle structure de système de commande met alors à la disposition de l'utilisateur trois modes de fonctionnement :

1 - Commandes manuelles classiques.

2 - Régulation de sous-ensembles considérés comme indépendants ou régulations "locales", analogues aux régulations classiques, mais élaborées à partir de l'optimisation quadratique.

3 - Régulation "globale" assurée par un coordinateur qui corrige chaque régulation locale pour assurer la fonctionnement optimal de tout le système.

Notons que cette méthode, si elle ne présente sur le plan théorique de la commande des processus aucune nouveauté (on aboutit à l'optimisation quadratique selon KALMAN), est cependant une étape indispensable entre les systèmes de régulation classique (par exemple par PID) et la commande directe en ligne de processus par calculateur (DDC).

1 - POSITION DU PROBLEME GLOBAL -

Cette approche du problème de la régulation par l'optimisation quadratique est bien connue. Les hypothèses particulières que l'on est amené à poser ont été largement justifiées par la simplicité et l'élégance de la solution obtenue : structure bouclée à coefficients constants.

Nous supposons donc que le processus global est décrit par une équation d'état dynamique :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w} \quad (1)$$

$\underline{x}$: vecteur d'état de dimension n

$\underline{u}$: vecteur de commande de dimension r

$\underline{w}$: vecteur perturbant de dimension n

A : matrice n × n

B : matrice n × r

et une équation de sortie :

$$\underline{y} = C \underline{x} + \underline{v} \quad (2)$$

$\underline{y}$: vecteur de sortie de dimension m

$\underline{v}$: vecteur perturbant de dimension m

C : matrice m × n

Le problème consiste à choisir une commande $\underline{u}$ qui minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ((\underline{z} - \underline{y})^T Q (\underline{z} - \underline{y}) + \underline{u}^T R \underline{u}) dt + \frac{1}{2} ((\underline{z} - \underline{y})^T F (\underline{z} - \underline{y}))_{t=t_1} \quad (3)$$

$\underline{z}$ étant le vecteur de consigne de dimension m

$\underline{z} - \underline{y}$ est alors l'écart que l'on peut noter $\underline{e} = \underline{z} - \underline{y}$

2 - SOLUTION GLOBALE -

Pour déterminer les conditions que devra remplir la commande hiérarchisée, il est nécessaire d'exprimer d'abord la commande optimale globale.

La théorie de l'optimisation dynamique donne la commande optimale sous la forme d'un problème à valeurs limites, caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w} \\ \underline{y} &= C \underline{x} + \underline{v} \\ \underline{u} &= - R^{-1} B^T \underline{P} \end{aligned} \quad (4)$$

$\underline{P}$: vecteur adjoint de dimension n

avec :

$$\dot{\underline{P}} = - C^T Q C \underline{x} - A^T \underline{P} + C^T Q (\underline{z} - \underline{v}) \quad (5)$$

$\underline{x}(t_0)$ est donné

et :

$$\underline{P}(t_1) = F \underline{x}(t_1) \quad (6)$$

Mais la solution peut aussi s'exprimer sous la forme d'une relation de boucle fermée reliant $\underline{u}(t)$ à $\underline{x}(t)$:

$$\underline{u} = R^{-1} B^T (\underline{g} - K \underline{x}) \quad (7)$$

La matrice K étant solution de l'équation de RICCATI :

$$\dot{K} = - K A - A^T K + K B R^{-1} B^T K - C^T Q C \quad (8)$$

avec :

$$K(t_1) = C^T F C \quad (9)$$

et le vecteur d'entrée de cette boucle fermée étant solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{g}} = - (A - B R^{-1} B^T K) \underline{g} - C^T Q (\underline{z} - \underline{v}) + K \underline{w} \quad (10)$$

avec :

$$\underline{g}(t_1) = C^T F (\underline{z} - \underline{v}) \big|_{t=t_1} \quad (11)$$

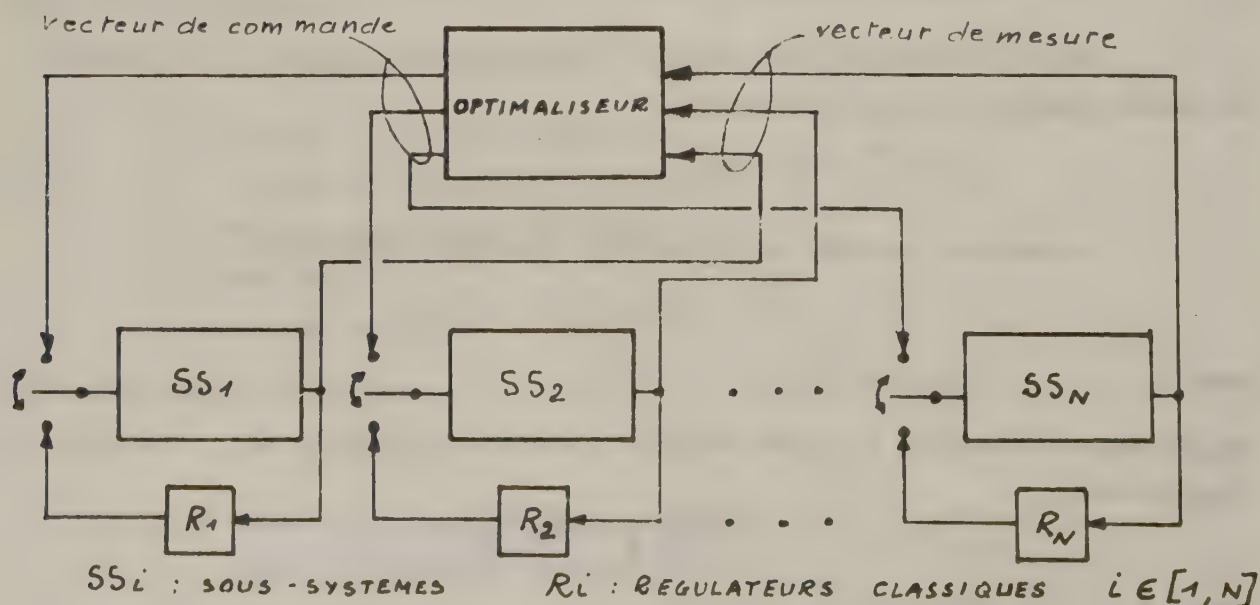
Nous noterons ici plusieurs caractéristiques de la commande optimale globale :

1) La commande optimale est unique mais la façon de l'obtenir ne l'est pas. Nous avons déjà ici deux possibilités : commande en boucle ouverte, obtenue par la résolution du problème à valeurs limites, et commande en boucle fermée, obtenue par le calcul de la matrice K. La commande hiérarchisée fournira une troisième possibilité d'obtention de cette commande unique.

2) La commande et donc chacune de ses composantes sont fonctions de tous les états du système, de toutes les composantes des consignes et de toutes les composantes des perturbations $\underline{w}$ et $\underline{v}$. La solution ainsi obtenue est optimale donc stable dans le cas des critères à borne infinie ou à horizon fuyant. Mais il est évident que l'on ne peut rien prédire quant à la stabilité du système quand une des commandes est défaillante ou quand une des mesures vient à manquer.

3) Pratiquement, il est donc indispensable de maintenir les régulations classiques en vue d'assurer un fonctionnement de secours en cas de défaillance du système optimal multivariable et aussi de permettre le démarrage de l'unité industrielle d'une façon séquentielle, tranche par tranche, sous-système par sous-système. Il n'est guère possible d'utiliser le système de commande global défini plus haut avant que toutes les parties du processus aient été amenées en fonctionnement automatique par les chaînes de régulation classiques.

Ces inconvénients sont assez mineurs tant que la dimension du système est faible. Il deviennent par contre d'une importance capitale dès que l'on s'intéresse à des systèmes de grande dimension et la plupart des commandes globales de processus se présentent actuellement sous la forme suivante :



La paragraphe suivant montre comment on peut décomposer le problème d'optimisation et mettre alors en place des systèmes de commande permettant de réaliser à la fois la commande globale optimale du processus et la commande sous-optimale de chacune de ses parties, considérées comme indépendantes dès que l'on ne veut ou que l'on ne peut plus maintenir la commande globale.

3 - DECOMPOSITION EN SOUS-SYSTEMES -

Pour simplifier l'exposé, et sans que cela n'enlève rien à la généralité de la méthode, nous décomposerons le système global en deux sous-systèmes et le critère global en deux sous-critères. Les hypothèses que nous serons amenés à faire ne sont pas restrictives quand on choisit un critère quadratique uniquement pour synthétiser un système de commande, mais elles pourraient bien s'en devenir quand le critère a une signification réelle (ce qui est rare) et que l'on ne peut pas en choisir la forme.

Opérons une partition de l'équation d'état de la façon suivante :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec : $\underline{x}_1$: vecteur de dimension n_1
 $\underline{x}_2$: vecteur de dimension n_2 avec $n_1 + n_2 = n$
 $\underline{u}_1$: vecteur de dimension r_1
 $\underline{u}_2$: vecteur de dimension r_2 avec $r_1 + r_2 = r$
 $\underline{w}$ étant bien sûr décomposé comme $\underline{x}$

Les matrices A_{12} , A_{21} , B_{12} , B_{21} sont appelées "matrices d'interaction" entre les sous-systèmes définis par $\underline{x}_1$, $\underline{u}_1$, $\underline{w}_1$ et $\underline{x}_2$, $\underline{u}_2$, $\underline{w}_2$. Si ces matrices sont nulles, les interactions ou couplages sont nuls et les systèmes sont dits "découplés".

Dans le choix de la partition et dans la façon d'ordonner les composantes de $\underline{x}$ et de $\underline{u}$, on aura avantage à se rapprocher autant que possible de ce cas idéal. Il faudra donc que les matrices A_{11} , A_{22} , B_{11} , B_{22} soient prépondérantes par rapport aux autres.

L'équation de sortie subit le même traitement :

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 - \underline{y}_1 \\ \underline{z}_2 - \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix}$$

avec : $\underline{y}_1$: vecteur de dimension m_1
 $\underline{y}_2$: vecteur de dimension m_2 et $m_1 + m_2 = m$

Ici, il est important de choisir une partition telle que la sortie de chaque sous-système ne dépende que des états de ce sous-système, c'est-à-dire que $C_{12} = C_{21} = 0$. Il est d'ailleurs fréquent que la sortie soit elle-même un état. Alors la matrice C ne contient que des 1 et des 0, ce qui simplifie le problème, chaque composante de $\underline{y}$ étant alors un état.

La décomposition des équations d'état et de sortie conduit à la décomposition du critère en deux sous-critères à condition qu'il n'y ait aucun terme rectangle contenant à la fois des indices différents, ce qui impose aux matrices Q , R et F , décomposées en :

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

d'être telles que Q_{12} , Q_{21} , R_{12} , R_{21} , F_{12} et F_{21} soient des matrices nulles.

On peut alors écrire :

$$J = J_1 + J_2 \quad (15)$$

$$\text{avec : } J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (e_1^T Q_{11} e_1 + u_1^T R_{11} u_1) dt \\ + \frac{1}{2} |e_1^T F_{11} e_1|_{t=t_1}, \quad t_1 \text{ étant fixé}$$

et de même pour J_2 .

On dit alors que les sous-critères sont additifs. C'est le cas en particulier quand on veut pondérer les écarts de régulation par rapport aux commandes et entre eux. Les matrices Q , R et F sont alors diagonales et tous leurs termes sont positifs :

$$\text{Exemple : } J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\alpha^2 e_1^2 + \beta^2 e_2^2 + \dots + a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 + \dots) dt$$

3,1 - Interactions des sous-systèmes (interactions de "modèle")

Pour chaque sous-système d'indice i on peut alors écrire une équation d'état :

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} \underline{u}_i + \underline{w}_i + A_{ij} \underline{x}_j + B_{ij} \underline{u}_j \quad (16)$$

et une équation de sortie :

$$\underline{y}_i = C_{ii} \underline{x}_i + \underline{v}_i \quad (17)$$

L'équation d'état peut encore se formuler de la façon suivante :

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} \underline{u}_i + \tilde{\underline{w}}_i \quad (18)$$

Le vecteur $\tilde{\underline{w}}_i$ est une pseudo-perturbation contenant à la fois les perturbations extérieures $\underline{w}_i$ et les perturbations "internes" $A_{ij} \underline{x}_j + B_{ij} \underline{u}_j$ exercées sur le système d'indice i par le reste du système global :

$$\tilde{\underline{w}}_i = \underline{w}_i + A_{ij} \underline{x}_j + B_{ij} \underline{u}_j \quad (19)$$

C'est d'ailleurs ce point de vue qui justifie la pratique classique des régulations monovariabiles isolées : les interactions que l'on néglige alors sont considérées comme des perturbations et prises naturellement en charge par la structure bouclée du système de commande.

3,2 - Interactions des commandes optimales

On peut associer aux équations (17), (18), (19) le critère correspondant J_i avec $J = \sum J_i$, et poser alors le problème de la façon suivante :

"Connaissant les perturbations $\underline{v}_i$ et $\tilde{\underline{w}}_i$, minimaliser le critère J_i en agissant sur $\underline{u}_i$, commande du sous-système décrit par les équations d'état et de sortie (17), (18) et (19)".

Notons d'abord que, pour connaître $\underline{v}_i$ et $\tilde{\underline{w}}_i$, il faut connaître la solution optimale des autres sous-systèmes puisque $\tilde{\underline{w}}_i$ en dépend.

Mais, même si on connaît la valeur optimale $\tilde{\underline{w}}_i^0$, la résolution du problème ainsi posé ne conduit pas à la solution optimale. Cela conduirait en effet à écrire :

$$\underline{u}_i = - R_{ii}^{-1} B_{ii}^T P_i \quad (20)$$

$$\text{avec : } \dot{P}_i = - C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \underline{x}_i - A_{ii}^T P_i + C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) \quad (21)$$

$$\text{et : } P_i(t_1) = F_{ii} \underline{x}_i(t_1) \quad (22)$$

Alors que le sous-vecteur de commande $\underline{u}_i$ et le sous-vecteur adjoint sont donnés par (4), (5) et (6) qui s'écrivent pour le sous-système d'indice i :

$$\underline{u}_i = - R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \underline{P}_i - R_{ii}^{-1} B_{ji}^T \underline{P}_j \quad (23)$$

avec :
$$\dot{\underline{P}}_i = - C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \underline{x}_i - A_{ii}^T \underline{P}_i + C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) - A_{ji}^T \underline{P}_j \quad (24)$$

et :
$$\underline{P}_i(t_1) = F_{ii} \underline{x}_i(t_1) \quad (25)$$

La présence de termes d'indice j indique une interaction au niveau des commandes optimales que l'on peut appeler "interaction d'optimisation".

Par conséquent, si nous voulons trouver séparément la commande optimale de chaque sous-système, il faudra tenir compte de ces deux types d'interaction.

4 - PROBLEME DU PREMIER NIVEAU - OPTIMALISATION LOCALE -

Supposons que les interactions optimales aient été calculées par le second niveau. Le problème du premier niveau est alors de résoudre le système à valeurs limites :

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} \underline{u}_i + \underline{w}_i^o \quad (26)$$

$$\underline{y}_i = C_{ii} \underline{x}_i + \underline{v}_i \quad (27)$$

$$\underline{u}_i = - R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \underline{P}_i + \underline{v}_i^o \quad (28)$$

$$\dot{\underline{P}}_i = - C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \underline{x}_i - A_{ii}^T \underline{P}_i + C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + \underline{\rho}_i^o \quad (29)$$

avec :
$$\underline{w}_i^o = A_{ij} \underline{x}_j^o + B_{ij} \underline{u}_j^o \quad (30)$$

$$\underline{v}_i^o = - R_{ii}^{-1} B_{ji}^T \underline{P}_j^o \quad (31)$$

$$\underline{\rho}_i^o = - A_{ji}^T \underline{P}_j^o \quad (32)$$

et les valeurs limites :

$$\underline{x}_i(t_0) \text{ donné}$$

$$\underline{P}_i(t_1) = F_{ii} \underline{x}_i(t_1)$$

Les indices supérieurs o désignent la valeur optimale des différentes grandeurs. Il est évident qu'alors on aboutit à la solution optimale puisque l'on ne fait que réécrire les conditions d'optimalité relatives à la composante i , en imposant leur valeur optimale aux autres, cette valeur étant fixée par le second niveau.

Comme pour le système global, ces équations peuvent aussi conduire à une solution en boucle fermée si on écrit :

$$\underline{P}_i = K_i \underline{x}_i - \underline{g}_i \quad (33)$$

alors :

$$\dot{\underline{P}}_i = \dot{K}_i \underline{x}_i + K_i \dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{g}}_i \quad (34)$$

En remplaçant $\dot{\underline{x}}_i$ par sa valeur (26), on obtient :

$$\dot{\underline{P}}_i = \dot{K}_i \underline{x}_i + K_i (A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} \underline{u}_i + \underline{\tilde{w}}_i^0) - \dot{\underline{g}}_i$$

ou encore en exprimant $\underline{u}_i$ d'après (28) :

$$\dot{\underline{P}}_i = \dot{K}_i \underline{x}_i + K_i (A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} (-R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \underline{P}_i + \underline{v}_i^0) + \underline{\tilde{w}}_i^0) - \dot{\underline{g}}_i$$

or, $\underline{P}_i$ s'exprime par (33) et on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}_i = \dot{K}_i \underline{x}_i + K_i \{A_{ii} \underline{x}_i + B_{ii} (-R_{ii}^{-1} B_{ii}^T (K_i \underline{x}_i - \underline{g}_i) + \underline{v}_i^0) \\ + \underline{\tilde{w}}_i^0\} - \dot{\underline{g}}_i \end{aligned} \quad (35)$$

de même, l'équation (29) peut s'écrire grâce à (33) :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}_i = -C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \underline{x}_i - A_{ii}^T (K_i \underline{x}_i - \underline{g}_i) \\ + C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + \underline{\rho}_i^0 \end{aligned} \quad (36)$$

En identifiant ces deux dernières équations, on obtient les relations de boucle fermée :

$$\dot{K}_i = -K_i A_{ii} - A_{ii}^T K_i + K_i B_{ii} R_{ii}^{-1} B_{ii}^T K_i - C_{ii}^T Q_{ii} C_{ii} \quad (37)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\underline{g}}_i = (-A_{ii}^T + K_i B_{ii} R_{ii}^{-1} B_{ii}^T) \underline{g}_i - C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) \\ + K_i \underline{\tilde{w}}_i^0 + K_i B_{ii} \underline{v}_i^0 - \underline{\rho}_i^0 \end{aligned} \quad (38)$$

avec : $K_i(t_1) = C_{ii}^T F_{ii} C_{ii}$

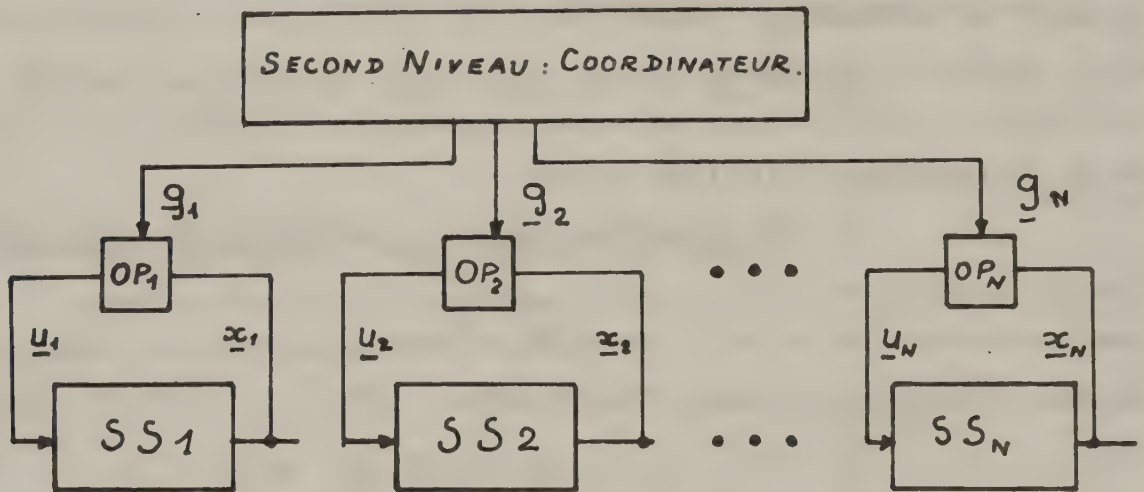
et : $\underline{g}_i(t_1) = [C_{ii}^T F_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i)]_{t=t_1}$

Ces résultats appellent plusieurs remarques :

- La matrice de bouclage K_i ne dépend pas des interactions. Elle peut être calculée une fois pour toutes et assure au sous-système un fonctionnement localement optimal et stable quand les interactions sont nulles. Nous avons donc ici une régulation locale capable de fonctionner isolément.

- Le vecteur $\underline{g}_1$, vecteur d'entrée de la boucle fermée, dépend des interactions. Il sera choisi par le second niveau de façon à ce que le sous-système bouclé par K_1 réagisse de façon optimale. C'est donc une troisième possibilité (commande en boucle ouverte, commande bouclée globalement et commande hiérarchisée) d'obtention de la trajectoire optimale qui reste unique bien entendu.

- Nous avons alors un schéma de commande (voir ci-dessous) qu'il est intéressant de comparer avec le schéma précédent : on voit que les systèmes de commande locale sont alors intégrés dans la commande globale.



SS_i : SOUS SYSTEMES

OP_i : OPTIMALISEURS LOCAUX

5 - PROBLEME DU SECOND NIVEAU -

Pour obtenir un fonctionnement optimal, il est donc nécessaire de calculer les valeurs adéquates des vecteurs $\underline{g}_i$, qui forcent les structures bouclées par les matrices K_i . Ceci revient à trouver les valeurs optimales $\hat{w}_i^0$, $\hat{v}_i^0$ et $\hat{\rho}_i^0$ des interactions.

Les principes de coordination énoncés dans la première partie fournissent théoriquement les conditions nécessaires à une coordination optimale. Nous allons voir comment on pourrait procéder en utilisant le principe de prédiction des interactions. Mais cette procédure itérative se heurte en pratique au problème du temps de calcul quand on veut réaliser une commande en ligne.

Application du principe de prédiction de l'interaction

La méthode consiste à prédire les interactions $\hat{w}_i^0$, $\hat{v}_i^0$ et $\hat{\rho}_i^0$, à calculer à partir de ces prédictions les commandes optimales, puis, en résolvant les

équations du système ou en le simulant, à comparer les valeurs que l'on obtient effectivement alors aux valeurs prédites. Le principe de prédiction de l'interaction dit alors que la solution est globalement optimale si les valeurs prédites sont égales aux valeurs réelles.

Il reste à choisir un algorithme permettant de corriger la prédiction en utilisant le résultat. On peut utiliser par exemple un algorithme de calcul de la forme :

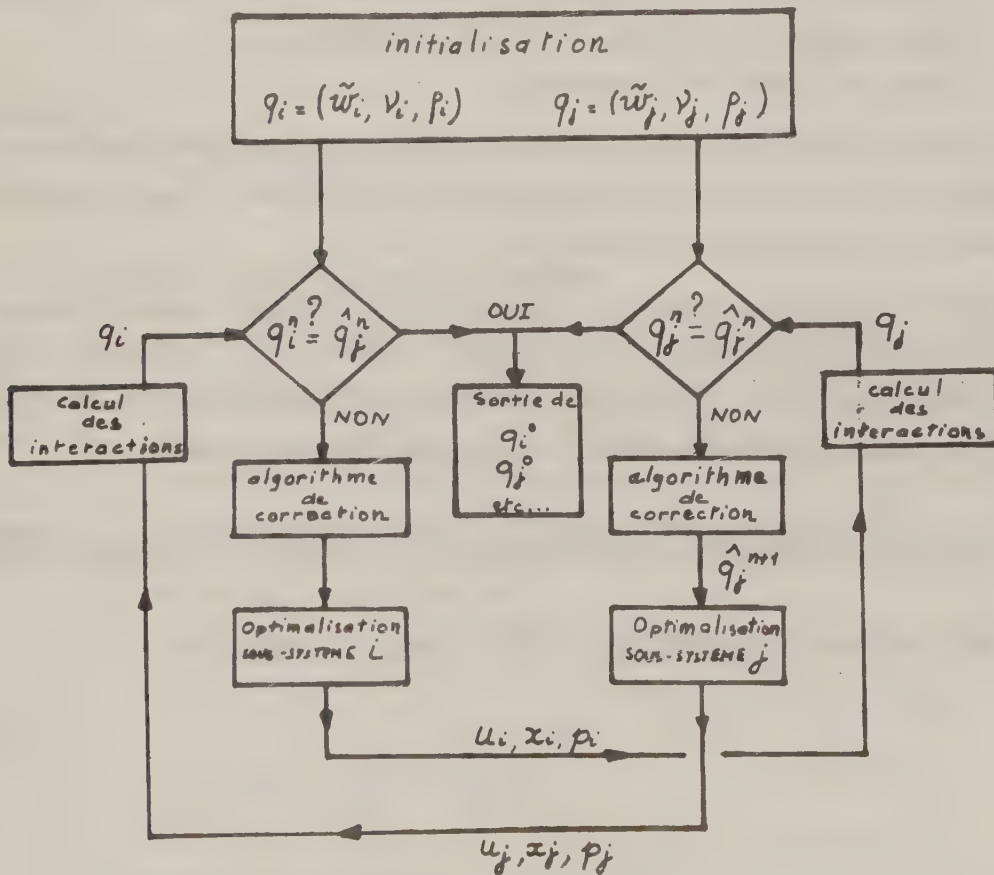
$$\hat{q}^{n+1} = \hat{q}^n + k (q^n - \hat{q}^n)$$

$\hat{q}^n$: valeur prédite de l'interaction

q^n : valeur réalisée

n : numéro d'ordre de l'itération

Et l'application du principe conduit à l'organigramme suivant, valable pour deux sous-systèmes.



Cette méthode itérative suppose la mémorisation à chaque étape des trajectoires $u_i(t)$, $x_i(t)$, $P_i(t)$, $u_j(t)$, $x_j(t)$ et $P_j(t)$.

Elle se révèle donc extrêmement lourde et, de plus, de par sa nature itérative, elle est inapplicable en ligne dès que la dimension du problème entraîne un temps de calcul trop important.

6 - COORDINATION EN LIGNE DANS LE CAS DES CRITERES A HORIZON TRES GRAND OU A HORIZON FUYANT -

Dans le cas où le critère intégral présente les formes $\int_{t_0}^{t_1}$ avec $t_1 \rightarrow \infty$ ou $\int_{t_0}^{t_0+T}$, critère dit "à horizon fuyant", les relations donnant la commande optimale se simplifient considérablement.

Si nous choisissons, de plus, les hypothèses suivantes :

$\underline{w}$: perturbation d'état connue et constante

$\underline{v}$: perturbation de sortie connue et constante

$\underline{z}$: consigne connue et constante

la solution globale du problème se concrétise par une matrice de bouclage K qui est constante et par un vecteur d'entrée $\underline{g}$ qui est constant et qui s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire de $\underline{w}$, $\underline{v}$ et $\underline{z}$.

C'est également le cas si les perturbations ont une nature aléatoire telle que l'on puisse appliquer le principe de séparation : l'espérance mathématique du critère est alors minimisée par la même commande que celle que l'on obtient en considérant uniquement le problème déterministe.

6,1 - Position du problème global à horizon très grand avec modèle stationnaire

Supposons que le système soit décrit par les équations :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w}$$

$$\underline{y} = C \underline{x} + \underline{v}$$

$$\underline{e} = \underline{z} - \underline{y}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{e}^T Q \underline{e} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt$$

avec : A, B, C, Q et R matrices constantes

$\underline{w}, \underline{v}$ et $\underline{z}$ vecteurs constants

$t_1 \rightarrow \infty$

Le coût final, caractérisé par la matrice F, n'a plus de sens ici puisque $t_1 \rightarrow \infty$.

La matrice de bouclage K(t) tend alors vers une constante qui est le régime permanent de l'équation de RICCATI : cette constante K doit donc vérifier l'équation :

$$-K A - A^T K + K B R^{-1} B^T K - C^T Q C = 0$$

L'équation d'état s'écrit alors :

$$\dot{\underline{x}} = (A - B R^{-1} B^T K) \underline{x} + B R^{-1} B^T \underline{g} + \underline{w}$$

et $\underline{g}$ est donné par :

$$\dot{\underline{g}} = (A - B R^{-1} B^T K) \underline{g} - C^T Q (\underline{z} - \underline{v}) + K \underline{w}$$

On peut montrer alors (1) que le vecteur g tend vers une constante donnée par la relation :

$$\underline{g} = - \left| (A - B R^{-1} B^T K)^T \right|^{-1} \left| C^T Q (\underline{z} - \underline{v}) - K \underline{w} \right|$$

ou encore :

$$\underline{g} = G (\underline{z} - \underline{v}) + H \underline{w}$$

6,2 - Optimalisation des sous-systèmes

Si on suppose tout d'abord que les interactions sont nulles, on peut définir les sous-problèmes de la même façon que le problème global. A partir des matrices A_{ii} , B_{ii} , C_{ii} , Q_{ii} et R_{ii} , on obtient une matrice K_i , et à partir de $\underline{w}_i$, $\underline{v}_i$ et $\underline{z}_i$, on détermine $\hat{\underline{g}}_i$ qui n'est pas le vecteur d'entrée optimal $\underline{g}_i^0$ mais seulement le vecteur correspondant au sous-système considéré comme isolé.

Ce vecteur $\hat{\underline{g}}_i$ est donné par :

$$\hat{\underline{g}}_i = - \left| (A_{ii} - B_{ii} R_{ii}^{-1} B_{ii}^T K_i)^T \right|^{-1} \left| C_{ii}^T Q_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) - K_i \underline{w}_i \right|$$

soit :

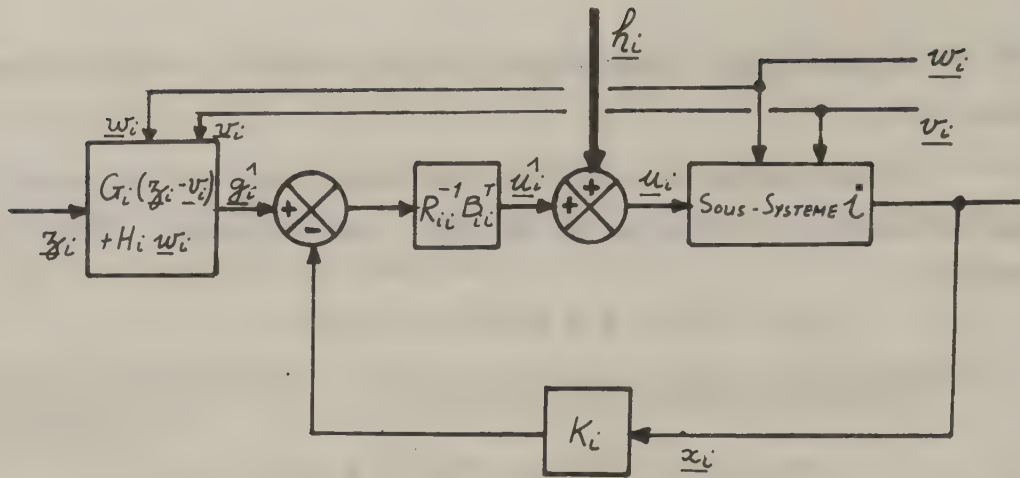
$$\hat{\underline{g}}_i = G_i (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + H_i \underline{w}_i$$

On obtient alors pour le sous-système isolé une commande $\hat{\underline{u}}_i$:

$$\hat{\underline{u}}_i = - R_{ii}^{-1} B_{ii}^T \left| K_i \underline{x}_i - \hat{\underline{g}}_i \right|$$

La coordination des sous-systèmes se traduira par l'addition à ce vecteur d'une commande de coordination $\underline{h}_i$ selon le schéma suivant :

(1) voir référence Athans Falb [4,2]



6,3 - Commande de coordination

La façon la plus simple d'obtenir cette commande est de comparer la commande locale $\hat{u}_i$ avec la valeur optimale qu'elle devrait prendre.

En décomposant la loi de commande globale, nous obtenons :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \end{bmatrix} = - R^{-1} B^T [K \underline{x} - \underline{g}]$$

ce qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= - R^{-1} B^T [K \underline{x} - G (\underline{z} - \underline{v}) - H \underline{w}] \\ &= L (\underline{z} - \underline{v}) + M \underline{w} - N \underline{x} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &= L_{ii} (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + M_{ii} \underline{w}_i - N_{ii} \underline{x}_i \\ &\quad + L_{ij} (\underline{z}_j - \underline{v}_j) + M_{ij} \underline{w}_j - N_{ij} \underline{x}_j \end{aligned}$$

Or, d'après notre schéma :

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &= \hat{u}_i + h_i \\ &= - R_{ii}^{-1} B_{ii}^T [K_i \underline{x}_i - G_i (\underline{z}_i - \underline{v}_i) - H_i \underline{w}_i] \\ &= L_i (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + M_i \underline{w}_i - N_i \underline{x}_i \end{aligned}$$

d'où l'expression de h_i en fonction des sous-matrices découlant de la partition de L, M et N en :

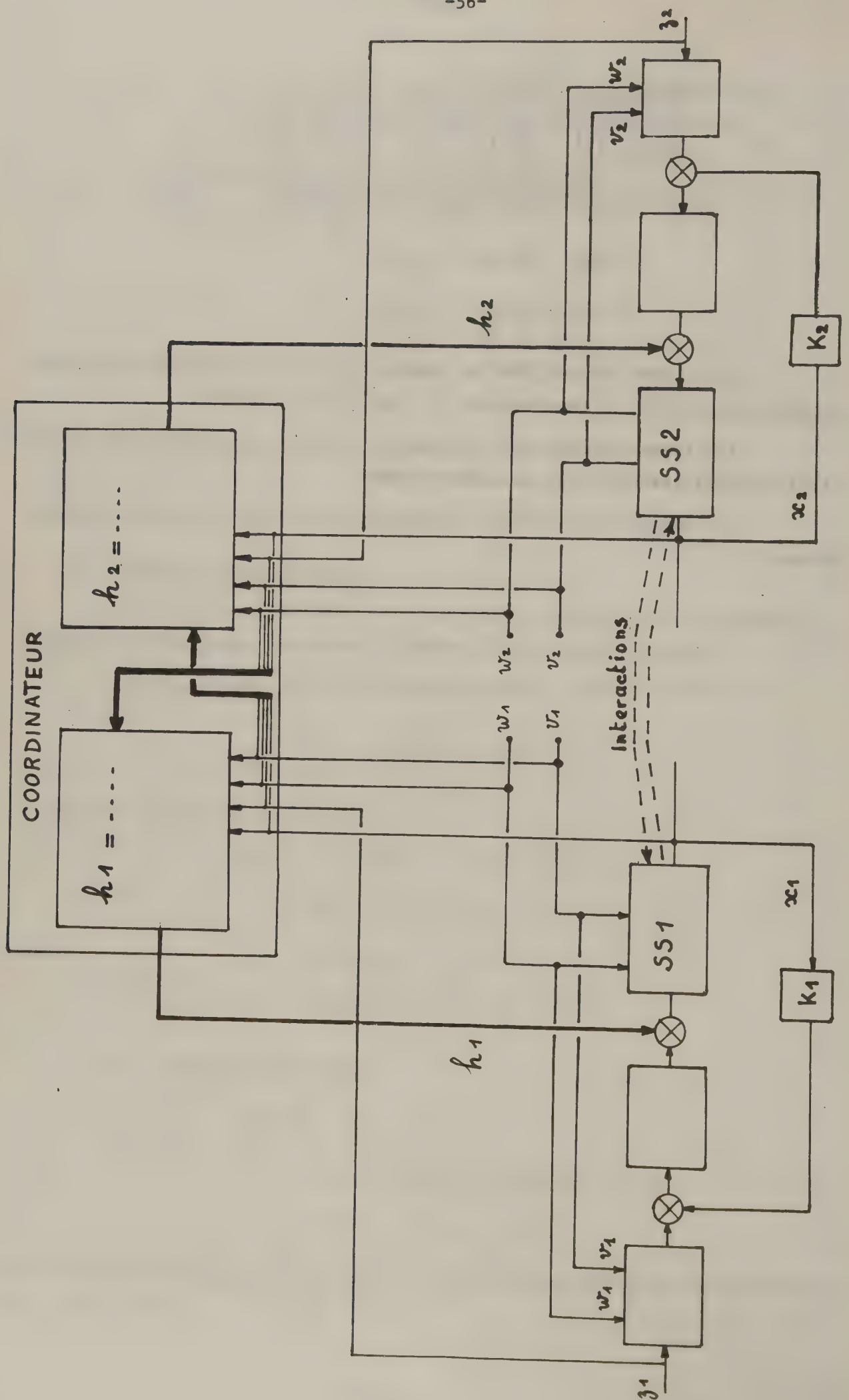
$$\left| \frac{L_{ii}}{L_{ji}} + \frac{L_{ij}}{L_{jj}} \right|, \quad \left| \frac{M_{ii}}{M_{ji}} + \frac{M_{ij}}{M_{jj}} \right|, \quad \left| \frac{N_{ii}}{N_{ji}} + \frac{N_{ij}}{N_{jj}} \right|$$

$$\begin{aligned} \underline{h}_i &= (L_{ii} - L_i) (\underline{z}_i - \underline{v}_i) + L_{ij} (\underline{z}_j - \underline{v}_j) \\ &+ (M_{ii} - M_i) \underline{w}_i + M_{ij} \underline{w}_j \\ &- (N_{ii} - N_i) \underline{x}_i - N_{ij} \underline{x}_j \end{aligned}$$

Les termes groupés dans la première colonne représentent les modifications imposées par le coordinateur aux régulations locales.

Les termes groupés dans la deuxième colonne représentent les interactions d'optimisation entre les sous-systèmes.

La commande hiérarchisée se présente alors sous la forme du schéma ci-après :



La réalisation pratique du coordinateur peut s'effectuer de plusieurs façons :

- De façon entièrement analogique, en utilisant les relations énoncées pour calculer à tout instant les fonctions de coordination $\underline{h}_i$.

- De façon numérique : il est alors probable que, si la partition du système a été bien choisie, il suffira d'une cadence de scrutation beaucoup plus faible pour le coordinateur que pour les régulateurs locaux. Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier de près ce problème qui risque d'avoir une application intéressante quand les régulations locales pourront être assurées par de petits calculateurs digitaux supervisés par un ordinateur plus important. Celui-ci pourrait alors être considérablement déchargé sur le plan de la cadence de scrutation.

- De façon hybride : les régulations locales étant assurées par des régulateurs optimaux analogiques et la coordination étant effectuée par un calculateur numérique. Les régulations analogiques restant constamment en ligne pour porter les premiers secours à chaque sous-système en cas de perturbation, la coordination peut alors se contenter de réajuster de temps en temps le fonctionnement des régulations locales.

6,4 - Avantages de la méthode

Grâce à sa structure hiérarchisée, ce système de commande optimale permet :

- le démarrage de chaque sous-système par une régulation locale sans coordination ($\underline{h}_i = 0$). Chaque sous-système est alors sous-optimal et commandé par une structure bouclée stable qui peut contenir les systèmes habituels de commutation : commande manuelle - commande automatique.

- Après le démarrage en régulations locales, il est possible d'assurer une commande optimale globale présentant, par rapport aux régulations locales, l'avantage de :

- pondérer les écarts et les commandes des sous-systèmes entre-eux.

- En cas de défaillance de la mesure ou de la commande dans un sous-système, il suffit de passer en commande manuelle pour ce sous-système et en régulation locale ($\underline{h}_i = 0$) pour les autres.

Nous avons donc un système très souple pouvant s'adapter aux différentes circonstances de fonctionnement d'une grande unité industrielle.

Mais on peut se demander quel avantage ceci procure quant au volume de matériel de commande nécessaire.

- Du côté régulations locales, cette solution ne demande que le remplacement des actuelles régulations classiques qui subsistent toujours par des régulations modernes, mises en oeuvre grâce à l'optimalisation quadratique.

- Du côté coordination, on doit faire face à un calcul aussi compliqué que celui d'une commande globale. Dans le cas d'une coordination analogique, on conserve donc sensiblement le même volume de matériel : les seuls avantages sont alors ceux qui concernent la souplesse d'exploitation. Mais, dans le cas d'une coordination numérique, il sera possible d'abaisser considérablement la fréquence de scrutation de chaque voie de mesure et la fréquence de calcul de la commande, celle-ci n'étant plus aussi importante que lors d'une commande digitale directe. Le calculateur est alors libre beaucoup plus souvent, ce qui, si on travaille en temps partagé, augmente considérablement ses possibilités.

Chapitre 4

APPLICATION A LA COMMANDE EN TEMPERATURE ET EN PRESSION D'UN GENERATEUR DE VAPEUR

INTRODUCTION : Description du processus

Le processus pilote est une chaudière marine capable de fournir 1500 Kg/h de vapeur à 20 bars surchauffée à 300°C. Cette vapeur alimente une turbo-génératrice à courant continu de 85 KW.

Cette chaudière à circulation naturelle comporte un ensemble évaporateur à tubes et ballon, puis un surchauffeur, un désurchauffeur permettant l'injection de l'eau et un resurchauffeur.

Après détente, la vapeur est condensée et recyclée par une pompe de charge.

Les deux commandes que nous considérons sont le débit de combustible (fuel) et le débit d'eau de désurchauffe.

Les deux grandeurs à régler seront la pression et la température à l'entrée de la turbine.

Il convient de préciser la nature des perturbations auxquelles devra faire face le système de commande. Bien que très différente des chaudières de centrales thermiques, nous avons voulu que cette chaudière ait un travail très voisin : fournir à une pression constante et à une température constante la vapeur du groupe générateur, malgré les variations de charge du réseau électrique utilisateur.

La régulation de vitesse de la turbine étant très rapide devant les constantes de temps de la chaudière, on admettra qu'une variation en échelon de la puissance demandée se traduise immédiatement par une variation en échelon du débit de vapeur.

Le problème est donc le suivant : devant une variation de débit de vapeur, agir sur le débit de combustible et le débit d'eau de désurchauffe de façon à éviter les écarts trop importants en pression et en température.

1 - MODELE ET CRITERE -

La résolution du problème de régulation, à l'aide de l'optimisation, nécessite d'abord la connaissance d'un modèle du processus.

L'élaboration de ce modèle comprend deux étapes :

- une caractérisation, c'est-à-dire le choix d'une forme d'équations de fonctionnement, établie à partir des connaissances théoriques et expérimentales.

- une identification permettant de déterminer les valeurs des paramètres qui amèneront le modèle à avoir un comportement très voisin de celui du processus.

La méthode utilisée pour élaborer notre modèle est l'identification par filtrage non linéaire [4,1].

Le modèle établi est le suivant :

$$\dot{P}_b = 0,000396 q_c + 0,0000325 (q_d - q_s)$$

$$\dot{t}_s = \frac{1}{154} [-(t_s - 2) + 1,25 (q_c - 80) - 0,1 (q_s - 1000) - x_3]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{83} [-x_3 + 1,375 (q_d - 40)]$$

$$P_s = P_b - 1,225 \left(\frac{q_s}{1000}\right)^2$$

P_b : écart de pression au ballon autour de 20 bars (± 5 bars)

P_s : écart de pression de sortie autour de 20 bars (± 5 bars)

t_s : écart de température de sortie autour de 300°C ($\pm 100^\circ\text{C}$)

x_3 : variable intermédiaire

q_c : débit de combustible en kg/h (0 à 200)

q_d : débit d'eau de désurchauffe en kg/h (0 à 200)

q_s : débit de vapeur en kg/h (0 à 2000)

Le critère quadratique fera intervenir les écarts en pression et en température et la vitesse de variation des grandeurs de commande de façon à ménager les organes du processus. Ce qui justifie un critère de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (t_s^2 + \alpha^2 P_s^2 + \beta^2 \dot{q}_c^2 + \gamma^2 \dot{q}_d^2) dt$$

Ce qui conduit à considérer comme commandes les dérivées des débits de combustible et d'eau :

$$u_1 = \dot{q}_c$$

$$u_2 = \dot{q}_d$$

Pour obtenir une régulation fonctionnant en permanence, on pourrait choisir les bornes $t_0 = 0$ et $t_1 \rightarrow +\infty$. En réalité, ce qui est très peu différent, nous avons choisi $t_0 = t$ (le temps courant) et $t_1 = t+T$, avec $T = 600$ secondes, ce qui simplifie le calcul de l'optimaliseur.

Coefficients du critère : $\alpha^2 = 16$

$$\beta^2 = \gamma^2 = 30$$

Le problème s'énonce donc sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_b \\ \dot{q}_c \\ \dot{t}_s \\ \dot{x}_3 \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,000396 & 0 & 0 & 0,000325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25/154 & -1/154 & -1/154 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/83 & +1,275/83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b \\ q_c \\ t_s \\ x_3 \\ q_d \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,000325 q_s \\ 0 \\ -0,00064935 q_s + 0,012987 \\ -0,66265 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La pression de sortie du générateur de vapeur est égale à la pression en ballon à la perte de charge près :

$$P_s = P_b - 1,225 \left(\frac{q_s}{1000} \right)^2$$

2 - SOLUTION OPTIMALE GLOBALE -

La solution est donnée par l'équation suivante dans laquelle on peut distinguer :

- le terme de bouclage assuré par la matrice K
- le terme de tendance représenté par le vecteur g :

$$\underline{u} = -R^{-1}B^T(K\underline{x} - \underline{g})$$

avec : $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $\underline{x} = [P_b, q_c, t_s, x_3, q_d]^T$

$$R = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice K est calculée hors ligne en utilisant les résultats du chapitre précédent (équation de RICCATI) :

$$K = \begin{bmatrix} 1981 & 9,37 & 21,3 & -57,7 & +19,8 \\ 9,37 & 1,46 & -0,77 & +4,00 & +0,21 \\ 21,3 & -0,77 & +0,96 & -4,07 & +0,54 \\ -57,7 & +4,00 & -4,07 & +31,2 & -1,33 \\ +19,8 & +0,21 & +0,54 & -1,33 & +0,73 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\underline{g}$ est fonction de q_s (action par tendance). Etant donné le terme en q_s^2 qui intervient dans l'expression de P_s , il a fallu linéariser le problème en posant :

$$q_s = 1000 + \delta q_s$$

Nous obtenons alors $\underline{g}$ sous la forme d'une pseudo-consigne et d'un terme de tendance :

$$\underline{g} = \underline{g}_s + \underline{k} \delta q_s$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} 3972,8 & +5,707 \delta q_s \\ 117,6 & +0,140 \delta q_s \\ 189,7 & +0,175 \delta q_s \\ -12,3 & -0,008 \delta q_s \\ +37,3 & +0,034 \delta q_s \end{bmatrix}$$

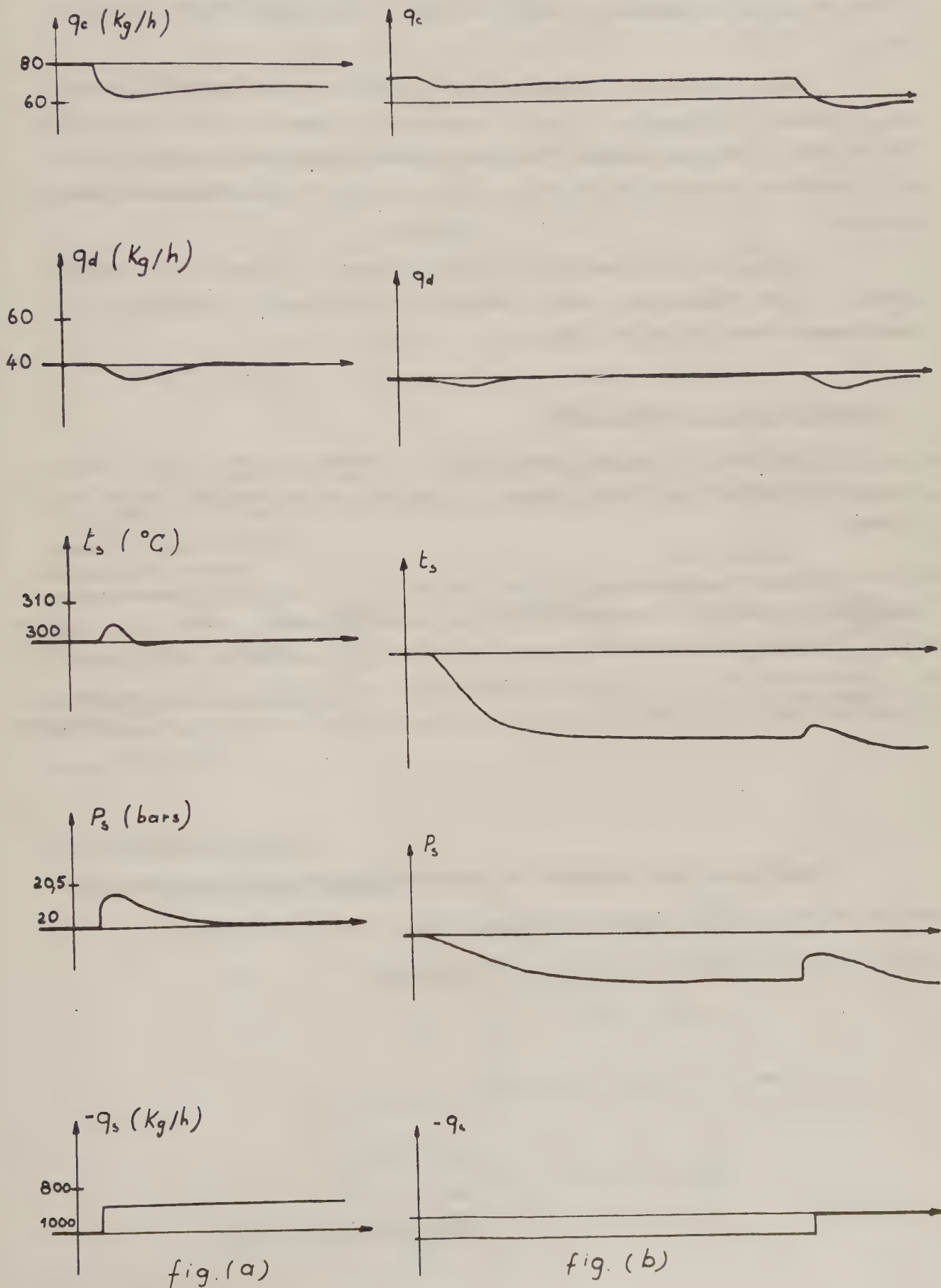
Ce qui nous permet d'obtenir chaque commande u_1 et u_2 en fonction de tous les états :

$$u_1 = \frac{1}{30} [-9,37 P_b - 4 t_s + 0,771 x_3 - 1,46 q_c + 0,211 q_d + 0,14 \delta q_s + 117,6]$$

$$u_2 = \frac{1}{30} [-19,8 P_b + 1,33 t_s - 0,544 x_3 + 0,211 q_c - 0,731 q_d + 0,034 \delta q_s + 37,3]$$

Nous remarquons donc que tous les états interviennent dans chaque composante du vecteur de commande.

Les résultats obtenus vis-à-vis d'une variation de q_s sont reportés à la figure suivante :



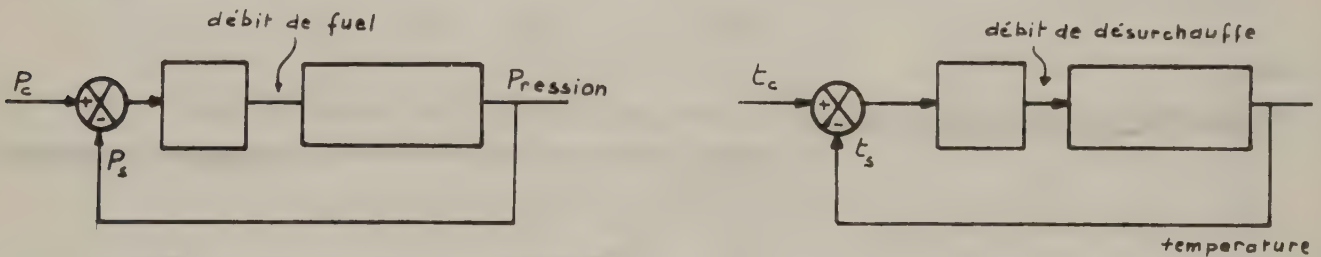
La figure (a) représente le fonctionnement optimal global et la figure (b) un fonctionnement accidentel se produisant quand on élimine, dans l'élaboration de la commande du débit de fuel, l'information venant de t_s et de q_d .

On voit qu'alors la structure ne permet pas de maintenir une régulation correcte : par exemple, il serait possible de ramener au moins la pression à son point de consigne puisque l'on peut toujours manipuler le débit de fuel, or la pression va en réalité se stabiliser à une valeur très éloignée de sa consigne.

Nous avons voulu montrer ici la délicatesse d'un système de commande global : il est évident que, dans l'éventualité d'un manque d'information, il faut commuter vers une autre structure.

3 - DECOMPOSITION ET INTERACTIONS -

Nous avons voulu nous rapprocher de la méthode classique des régulations monovariabiles qui peuvent assurer la commande de ce processus de la façon suivante :



Nous avons donc décomposé le vecteur d'état en deux sous-vecteurs :

$$\underline{x}^T = [P_b \ q_c \mid t_s \ x_3 \ q_d]$$

et le vecteur de commande a subi le même traitement :

$$\underline{u} = [u_1 \mid u_2]$$

La matrice A a donc été séparée :

$$\begin{bmatrix} x & x & | & x & x & x \\ x & x & | & x & x & x \\ \hline x & x & | & x & x & x \\ x & x & | & x & x & x \\ x & x & | & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \hline A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix}$$

De même, le critère a été séparé en :

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\alpha^2 P_s^2 + \beta^2 \dot{q}_c^2) dt$$

$$\text{et } J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\gamma^2 \dot{q}_s^2 + \gamma^2 \dot{q}_d^2) dt$$

Les interactions proviennent donc des matrices A_{12} et A_{21} qui se présentent sous la forme :

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,0000325 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1,25/154 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nous constatons donc que l'eau de désurchauffe, par l'intermédiaire de A_{12} , a peu d'influence sur la pression, alors que le débit de fuel influence fortement la température.

Lors de la mise en place des régulations locales, nous devons donc nous attendre à ce que la régulation de pression soit presque suffisante, alors que la régulation de température présentera beaucoup d'inconvénients car on a choisi comme variable de commande de cette grandeur le débit d'eau de désurchauffe, qui est moins influent que le débit de fuel ; ce qui montre déjà qu'une coordination sera nécessaire.

4 - REGULATIONS LOCALES -

4,1 - Régulation de pression

Ayant négligé les interactions, nous obtenons le sous-système suivant :

$$\begin{vmatrix} \dot{P}_b \\ \dot{q}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0,000396 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_b \\ q_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_1$$

$$+ \begin{vmatrix} -0,0000325 q_s \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P_s = P_b - 1,225 \left(\frac{q_s}{1000} \right)^2$$

avec :
$$J_1 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (16 P_s^2 + 30 \dot{q}_c^2) dt$$

La matrice K alors obtenue est la suivante :

$$K = \begin{vmatrix} 1330 & 21,9 \\ 21,9 & 0,721 \end{vmatrix}$$

et le vecteur g devra tenir compte du débit d'eau de désurchauffe nominal (et non de ses variations), de façon à assurer une commande u_1 nulle quand le processus est en régime nominal.

Nous obtenons alors la commande u_1 en fonction uniquement de P_b , q_c , δq_s et une constante :

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{30} [-21,9 P_b - 0,7214 q_c + 0,111 \delta q_s + 84]$$

4,2 - Régulation de température

Nous suivons la même procédure :

$$\begin{vmatrix} \dot{t}_s \\ \dot{x}_3 \\ \dot{q}_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/154 & -1/154 & 0 \\ 0 & -1/83 & +1,375/83 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_s \\ x_3 \\ q_d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u_2$$

$$+ \begin{vmatrix} -0,00064935 q_s + 0,012987 \\ -0,66265 \\ 0 \end{vmatrix}$$

avec :
$$J_2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (t_s^2 + 30 \dot{q}_d^2) dt$$

Nous obtenons la matrice K :

$$K = \begin{vmatrix} 47,96 & -9,00 & -3,365 \\ -9,00 & 2,554 & 1,288 \\ -3,365 & 1,288 & 1,129 \end{vmatrix}$$

et la commande u_2 s'écrit alors :

$$\hat{u}_2 = + \frac{1}{30} [+3,365 t_s - 1,288 x_3 - 1,129 q_d]$$

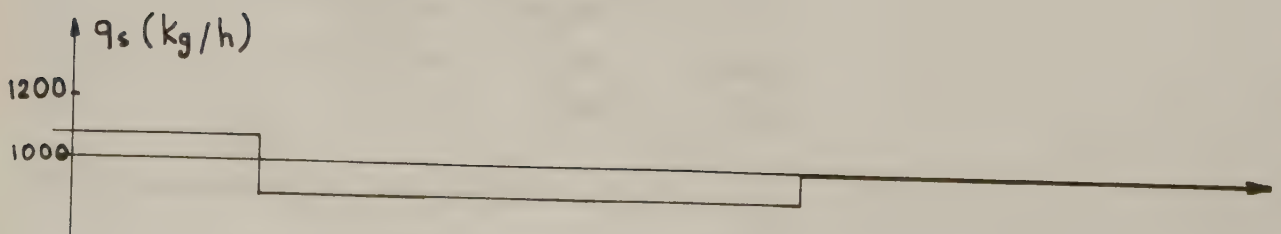
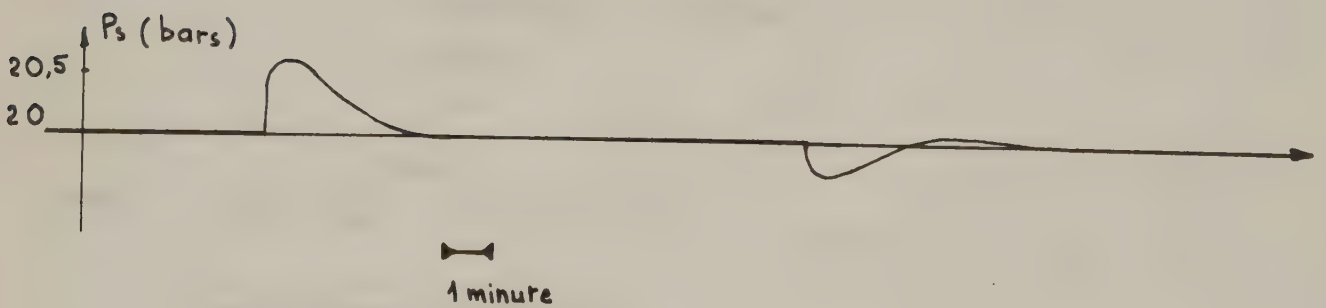
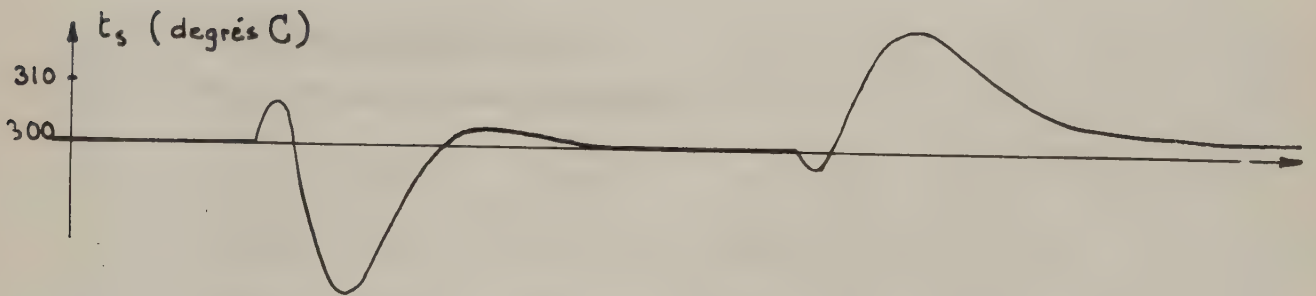
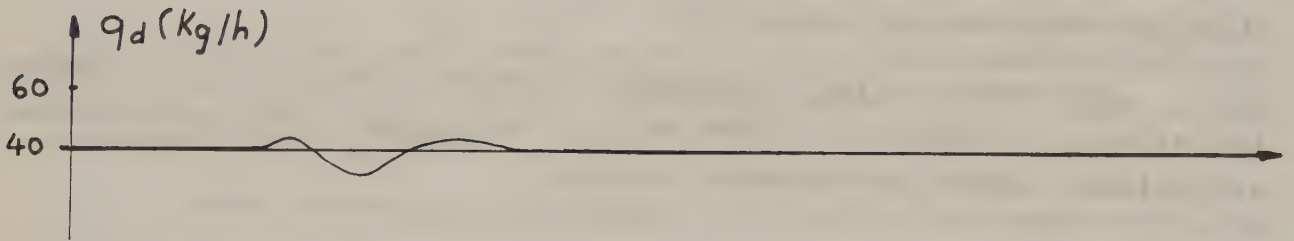
Les termes en δq_s et la constante sont ici négligeables.

4,3 - Performances des régulations locales

Nous avons testé l'action de ces régulations locales en l'absence de toute coordination. Nous pouvons constater sur la figure suivante que les interactions perturbent considérablement les réponses.

L'action du débit de fuel sur la température entraîne en particulier des écarts fort importants sur celle-ci, dus à la régulation de pression qui ne tient pas compte de cette interaction.

Par contre, en cas d'incident à l'intérieur d'une boucle (par exemple ici gel de q_d et annulation du terme en t_s), l'autre boucle n'est pas perturbée et continue d'assurer une régulation correcte.



Régulations locales

q_d "gelé" erreur en t_s
mais p_s reste correct.

5 - COORDINATION -

Il nous est alors très facile, en utilisant la théorie développée au chapitre 3, de calculer les grandeurs de coordination h_1 et h_2 telles que :

$$u_1 = \hat{u}_1 + h_1$$

$$u_2 = \hat{u}_2 + h_2$$

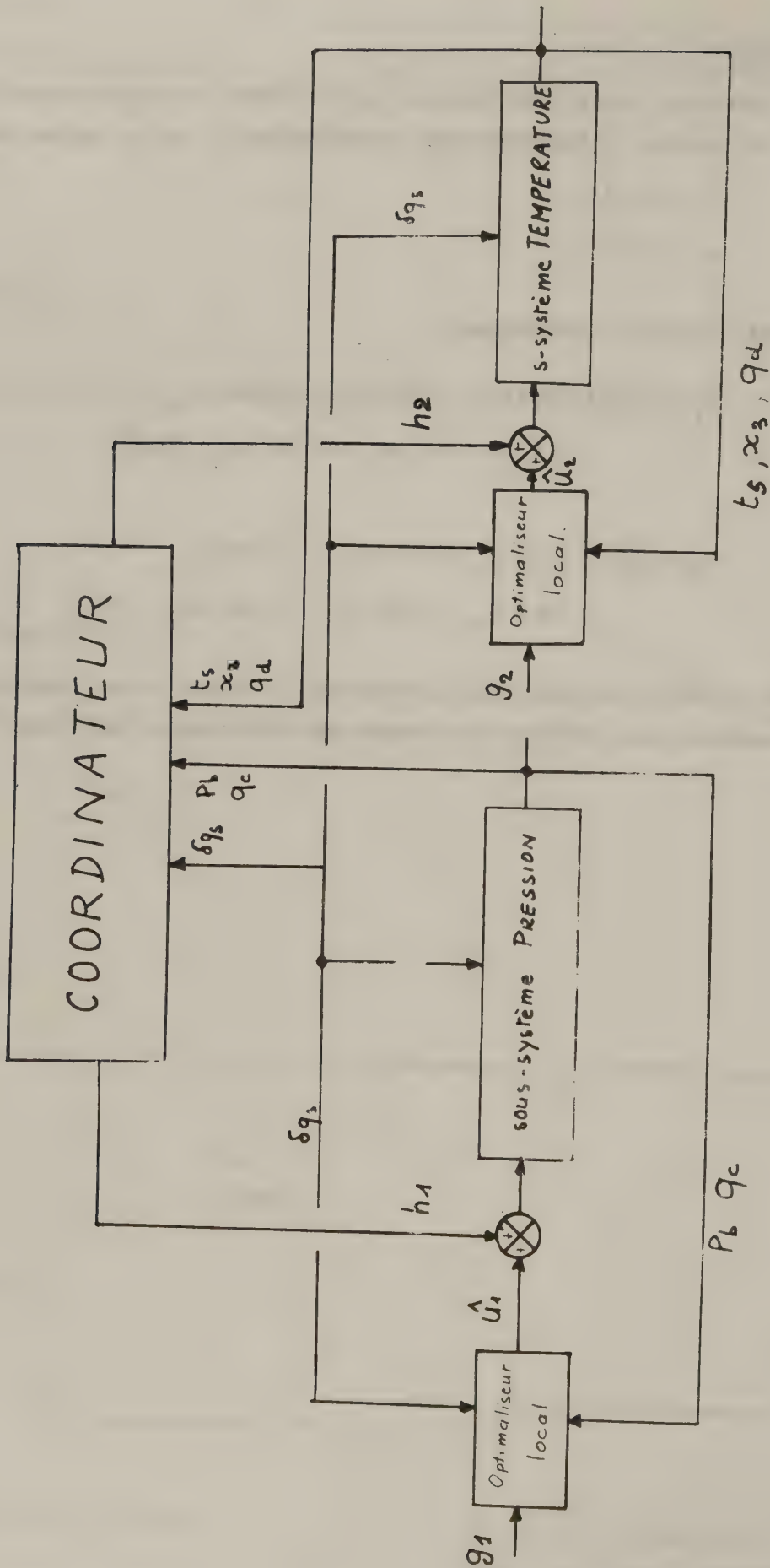
Nous obtenons immédiatement :

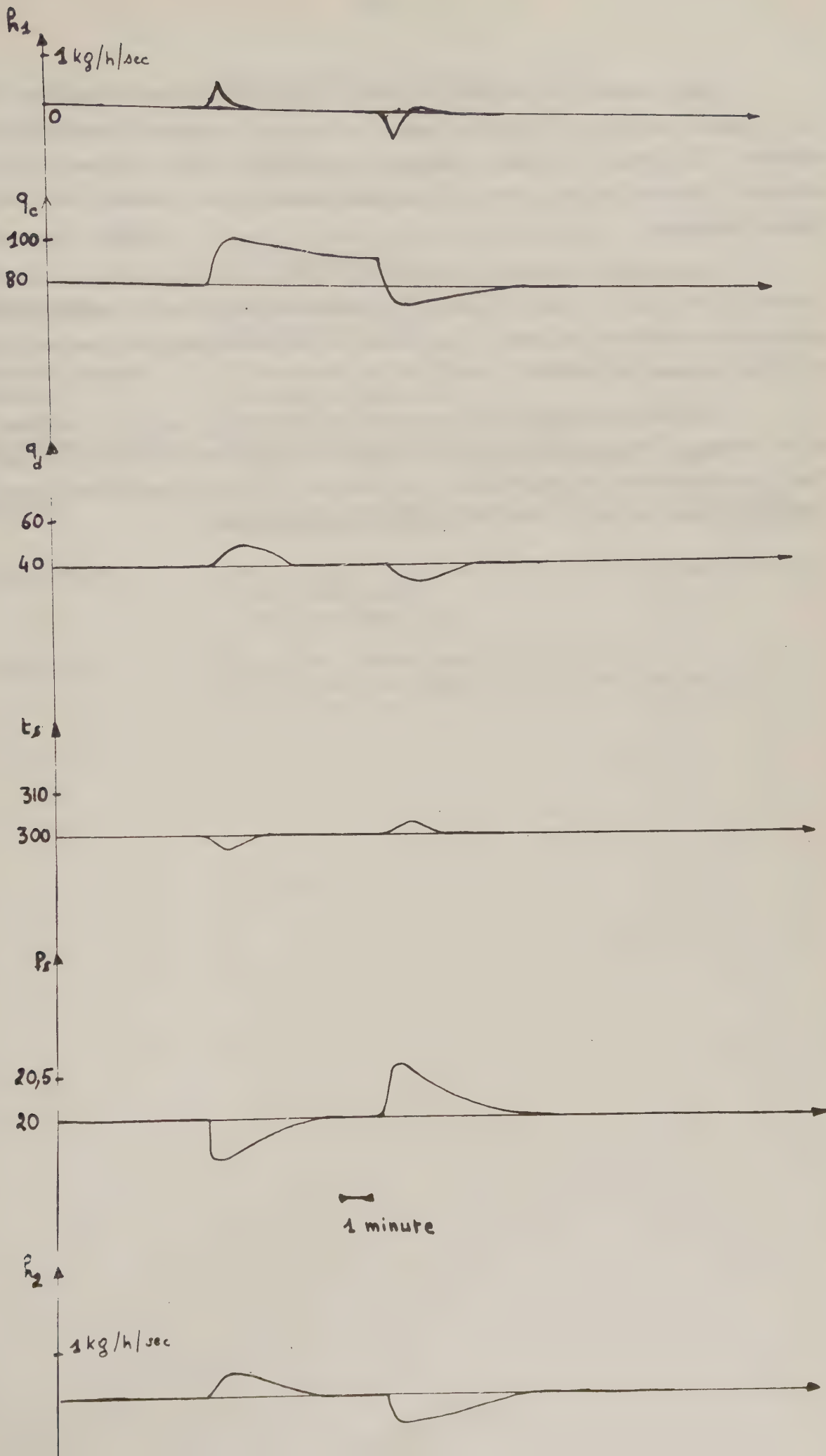
$$h_1 = \frac{1}{30} \left[+ 12,53 P_b - 0,74 q_c + 0,029 \delta q_s \right. \\ \left. - 4 t_s + 0,771 x_3 + 0,211 q_d + 33,6 \right]$$

et :

$$h_2 = \frac{1}{30} \left[- 2,03 t_s + 0,744 x_3 + 0,398 q_d \right. \\ \left. - 19,8 P_b + 0,211 q_c + 0,034 \delta q_s + 37,3 \right]$$

Et, grâce à la structure hiérarchique ci-après, nous pouvons à nouveau obtenir des régulations locales qui, elles, se comportent d'une façon globalement optimale.





Pour conclure ce dernier chapitre, il est nécessaire de mettre l'accent sur un aspect que nous n'avons pas traité ici et qui concerne la sensibilité des réponses à la justesse du modèle employé. Les résultats dont nous avons fait état sont dus à la simulation et nous n'avons pas grand mérite à obtenir des performances correctes.

Les erreurs de modèle influencent surtout l'erreur statique des régulations. A ce sujet, citons le travail de Monsieur FOULARD et de Monsieur ABDALLAH qui se sont attachés à éliminer l'influence de perturbations externes ou internes de valeur moyenne non nulle.

Ces travaux permettront de mettre une dernière touche de réalisme à cette structure hiérarchisée qui sera appliquée à d'autres processus, en particulier à la régulation de température d'un réacteur chimique chauffé par zones et présentant donc de fortes caractéristiques d'interactions.

Bibliographie des chapitres 3 et 4

- FINDEISEN, LEFKOWITZ - "Design and application of multilayer control"
IFAC Varsovie 1969
- ATHANS, FALB - "Optimal control"
Mc Graw Hill 1966
- MESAROVIC, MACKO, TAKAHARA - "Structuring of multilevel systems"
IFAC Dusseldorf 1968
- DE LARMINAT, THOMAS - "Etude d'une régulation optimale"
Rapport D.G.R.S.T., E.N.S.M., Nantes, 1970
- MESAROVIC - "Multilevel systems theory : state of the art, 1971"
IFAC Dusseldorf 1971
- B. CHENEVEAUX - "Synthesis of a multivariable control system via multilevel techniques"
IFAC Dusseldorf 1971
- A. ABDALLAH - "Régulation quadratique optimale"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M., Nantes, 1971

CONCLUSION

Il est toujours difficile de faire le lien entre plusieurs axes de recherche qui, bien qu'appartenant au même domaine, arrivent souvent à diverger si ce domaine est vaste.

Nous avons voulu ici donner deux applications simples et, nous l'espérons, utiles d'une théorie dont beaucoup parlent mais qui a certaines difficultés à sortir de l'impasse que constitue un trop grand développement théorique coupé du souci des applications.

En effet, l'idée de départ paraît très prometteuse : le traitement des systèmes de grande dimension est difficile, remplaçons le par une succession de problèmes de dimension moindre. Les avantages attendus sont évidents : utilisation de moyens réduits, possibilité de se servir de méthodes éprouvées. Ces avantages se concrétisent dans le domaine de l'optimisation statique par une nouvelle jeunesse accordée aux algorithmes classiques, dans le domaine de l'optimisation dynamique par une structure intermédiaire entre les régulations monovariées à correcteur PID et les structures optimales un peu trop éloignées de l'état d'esprit des utilisateurs et des créateurs de l'Automatique des processus industriels.

Cependant, le problème a conduit d'abord vers le développement de principes et de théorèmes d'existence et de possibilité. C'est pourquoi nous avons choisi de suivre une voie plus pratique qui nous a amenés à distinguer les quatre chapitres de ce travail.

Le premier chapitre expose le but de l'optimisation hiérarchisée et les problèmes qu'elle pose. Après avoir parlé de la décomposition et des interactions dans les systèmes décomposés, nous avons dégagé les deux grands axes qui permettent de réaliser la coordination qui permettra d'amener l'optimisation des sous-systèmes à réaliser une véritable optimisation globale. Ces deux principes consistent à agir, soit sur le modèle utilisé par l'optimiseur, soit sur le critère qui détermine la résolution des sous-problèmes. Pour chaque méthode, nous avons donné des exemples très simples qui parlent mieux que toutes les théories.

Ces méthodes se prêtant surtout à l'optimisation statique hors ligne, nous avons voulu les rendre utiles en les appliquant au calcul hors ligne des

trajectoires optimales d'un système dynamique décrit par des équations récurrentes linéaires, soumis à des butées sur l'état et sur la commande et pour lequel on veut minimaliser un critère quadratique. Nous avons pu ainsi élaborer un programme général dont l'utilité pourra être, par exemple, de guider l'utilisateur dans la réalisation de stratégies sous-optimales. L'exposé de ce travail occupe le second chapitre.

La vocation du Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. étant avant tout la commande en ligne de processus, nous avons essayé dans le troisième chapitre d'élaborer une structure hiérarchique simplifiée permettant de commander des processus par le biais de l'optimalisation quadratique. Ceci nous a conduit à un coordinateur qui, dans le cas des critères à horizon infini ou fuyant, est facilement réalisé par l'addition d'une "coordination" aux régulations locales. Ces coordinations étant simplement une combinaison linéaire des états et des perturbations, elles modifient le bouclage de chaque régulation, elles font intervenir les autres parties du processus et elles corrigent les actions par tendance déjà mises en place par les régulations locales.

L'application de cette structure hiérarchique se fait au cours du quatrième chapitre à un processus pilote (générateur de vapeur) décrit par une équation d'état du cinquième ordre que l'on sépare en deux régulations locales d'ordre deux et d'ordre trois, coordonnées suivant les méthodes décrites au chapitre précédent. On met en évidence la souplesse et la fiabilité de cette solution par rapport aux solutions globales que l'on obtient quand on pose directement le problème.

Nous nous devons ici de mettre l'accent sur deux points : le fossé qui s'est creusé entre la théorie de la commande hiérarchisée et ses éventuelles applications, et les difficultés que l'on rencontre quand on veut remplacer des solutions classiques par de plus modernes.

En effet, la théorie de la commande hiérarchisée s'est développée très rapidement dans le domaine de l'automatique théorique. Cédant à une "mode" assez répandue, les inventeurs de cette théorie en ont jeté aussi solidement que possible les bases en utilisant les mathématiques modernes et, en particulier, l'analyse fonctionnelle. De leur propre aveu, les applications n'ont pas suivi cet essor et il est assez difficile actuellement, plusieurs années après les débuts de ces travaux, de citer des réalisations.

Dans un tout autre domaine, les utilisateurs de régulations continuent, longtemps après les premiers travaux sur l'optimalisation, d'utiliser des matériels conventionnels. Bien souvent, ce n'est pas un souci vraiment financier qui guide ce choix : un calculateur industriel qui réalise plusieurs PID monovariab-

pourrait tout aussi bien faire autre chose : par exemple, coordonner des régulations analogiques. C'est, à notre avis, surtout la méfiance qui freine la modernisation des régulations et celle-ci ne fait que traduire un souci louable de sécurité, de fiabilité et de souplesse.

Si modeste que soit l'exemple traité ici, nous espérons qu'il contribuera à combler ces deux fossés : entre les mathématiques et leurs applications, entre ces applications et leur raison d'être : le processus industriel.

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

